MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 6 : Conjunto Imagen y Composición

27 de abril del 2017

P1. [Propiedades de la imagen y la preimagen]
Sea $f : E \to F$ y $g : F \to G$ funciones (no necesariamente biyectivas).

a) Probar que:
$$(\forall A, B \subseteq E)[f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)] \iff f \text{ es inyectiva}$$

b) Sea $A \subseteq G$. Probar que:
$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$$

c) Sea $B \subseteq F$. Probar que:
$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$$

Solución 1.

a) Demostremos cada implicancia por separado.

($\Longleftarrow$) Sean $A, B \subseteq E$, demostraremos que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$ y que $f(A) \cap f(B) \supseteq f(A \cap B)$

($\subseteq$) Sea $y \in f(A) \cap f(B)$, luego existen $a \in A$ y $b \in B$ tal que
$$y = f(a) = (b)$$
Como f es inyectiva, tenemos que $a = b$, en particular $a \in A \cap B$ y por tanto $y = f(a) \in f(A \cap B)$.

($\supseteq$) Sea $y \in f(A \cap B)$, luego existe $x \in A \cap B$ tal que $y = f(x)$ como $x \in A$ y $x \in B$, entonces $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$.

($\Longrightarrow$) Sean $x_1, x_2 \in E$ tal que $f(x_1) = f(x_2) = y$, luego:
$$y \in f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = f(\{x_1\} \cap \{x_2\})$$
Notemos que como $f(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \emptyset$, entonces $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$, por tanto $x_1 = x_2$. Luego f es inyectiva.

b) Sea $x \in E$, tenemos:
$$\begin{aligned} x \in (g \circ f)^{-1}(A) &\iff (g \circ f)(x) \in A \\ &\iff g(f(x)) \in A \\ &\iff f(x) \in g^{-1}(A) \\ &\iff x \in f^{-1}(g^{-1}(A)) \end{aligned}$$
Luego $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

c) Demostremoslo por doble inclusión.

($\subseteq$) Sea $x \in f(f^{-1}(B))$, es decir $x = f(y)$ para algún $y \in f^{-1}(B)$, por tanto $x = f(y) \in B$. Además, como $y \in E$ se tiene que $x \in f(E)$. Concluimos que $x \in B \cap f(E)$.

($\supseteq$) Sea ahora $x \in B \cap f(E)$, entonces $x = f(y)$ para algún $y \in E$ y además como $x \in B$ tenemos $f(y) \in B$. De esto deducimos que $y \in f^{-1}(B)$ y que $x = f(y)$. Es decir $x \in f(f^{-1})$.

P2. [P2 Control 1, Año 2016-β]

a) Sea $R : X \to X$ tal que $R(X) = X$ y $R \circ R = R$. Demuestre que $R = Id_X$.

b) Sea $S : X \to X$ sobreyectiva tal que $S \circ S \circ S = S$. Demuestre que S es invertible y calcule su inversa.
Hint: Puede usar el resultado de la parte anterior para una función apropiada.

Solución 2.

a) Como $R(X) = X$ sabemos que R es sobreyectiva. Sea entonces $x \in X$, por sobreyectividad, sabemos que existe $y \in X$ tal que $R(y) = x$. Ocupando esto tenemos que:

$$\begin{aligned}
R(y) &= x & & \\
R(R(y)) &= R(x) & & /R(\ \ ) \\
R \circ R(y) &= R(x) & & /R \circ R = R \\
R(y) &= R(x) & & /R(y) = x \\
x &= R(x) & &
\end{aligned}$$

Como lo anterior era para $x \in X$ arbitrario tenemos que $\forall x \in X$ se cumple que $R(x) = x$, por tanto $R = Id_X$.

b) Como S es sobreyectiva, entonces $S \circ S$ también lo es, como además $(S \circ S) \circ (S \circ S) = (S \circ S)$ podemos ocupar la parte *a*) sobre $S \circ S$. De esto $S \circ S = Id_X$, de donde tenemos que S es invertible con inversa S y al ser invertible S es biyectiva.

P3. [Encontrando preimagenes e imagenes]

Sea $U \neq \emptyset$ un conjunto universo. Se define la función $f : \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) \longrightarrow \mathcal{P}(U)$ por

$$f(X, Y) = X \backslash Y$$

a) Demuestre que $f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{U, \emptyset\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$.

b) Determine, justificando su respuesta, el conjunto $f(D)$ (imagen de D), en donde

$$D = \{(X, X) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \in \mathcal{P}(U)\}$$

Solución 3.

a) Encontremos $f^{-1}(\{U, \emptyset\})$. Notemos que $(X, Y) \in f^{-1}(\{U, \emptyset\})$ si y sólo si $f(X, Y) \in \{U, \emptyset\}$ y esto último pasa si y sólo si $f(X, Y) = U$ o $f(X, Y) = \emptyset$. Concluimos que los elementos de $f^{-1}(\{U, \emptyset\})$ son los (X, Y) que satisfacen $f(X, Y) = U$ o los que satisfacen $f(X, Y) = \emptyset$. Si satisfacen lo primero tenemos que $X \setminus Y = U$ es decir cuando le quito Y a X me quedo con todo el universo, por tanto $X = U$ e $Y = \emptyset$, por otra parte si satisfacen lo segundo tenemos que $X \setminus Y = \emptyset$, es decir cuando le quito Y a X no me quedo con nada, por tanto X debe estar completamente contenido en Y. Juntando estos dos hechos tenemos que:

$$f^{-1}(\{U, \emptyset\}) = \{U, \emptyset\} \cup \{(X, Y) \in \mathcal{P}(U) \times \mathcal{P}(U) : X \subseteq Y\}$$

b) Notemos que:

$$\begin{aligned}
& Z \in f(D) \\
\iff & Z = f(X, Y) \quad (X, Y) \in D \\
\iff & Z = f(X, X) \quad (X, X) \in D \\
\iff & Z = X \setminus X \quad (X, X) \in D \\
\iff & Z = \emptyset
\end{aligned}$$

Esto nos dice que $f(D) = \{\emptyset\}$.

P4. [P2 Control 2, Año 2014]
Sean $A, B \neq \emptyset$ y $f : A \to B,\ g : B \to A,\ h : B \to B$ funciones tal que:

- h es biyectiva.
- $f \circ g = h$.
- $g \circ f = Id_A$

a) Muestre que f y g son biyectivas.

b) Muestre que $h = Id_B$.

Solución 4.

a) Procedamos paso a paso deduciendo propiedades de f y g. Como $f \circ g$ es una función biyectiva (pues es igual a h) por tanto al ser inyectiva y sobreyectiva a la vez, f es inyectiva y g es sobreyectiva. Como $g \circ f$ es biyectiva (pues es igual a Id_A que es biyectiva) por el mismo argumento anterior g es inyectiva y f es sobreyectiva. De esto se concluye que ambas son biyectivas.

b) Como f es biyectiva, entonces es invertible. Tomando inversas a la tercera ecuación tenemos que $g = Id_A \circ f^{-1} = f^{-1}$, reemplazando en la segunda ecuación se tiene que $h = f \circ g = f \circ f^{-1} = Id_B$.

P5. [Funcionales]

Sea $\mathcal{F} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1]/f \text{ función}\}$ y $\mathcal{B} = \{f : [0,1] \longrightarrow [0,1]/f \text{ función biyectiva}\}$. Se definen así las funciones $\Phi : \mathcal{F} \to [0,1]$ y $\mathcal{I} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ dadas por:

$$\Phi(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2}, \quad \mathcal{I}(f) = f^{-1}$$

a) Demuestre que Φ está bien definida, es decir, verifique que $(\forall f \in \mathcal{F}), \Phi(f) \in [0,1]$.

b) Estudie inyectividad y sobreyectividad de Φ.

c) Pruebe que $\mathcal{I}(f \circ g) = \mathcal{I}(g) \circ \mathcal{I}(f)$.

d) Pruebe que $\mathcal{I}$ es biyectiva.

e) Demuestre que $(\Phi \circ \mathcal{I})^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ (preimagen del conjunto $\{0\}$).

Solución 5.

a) Sea $f \in \mathcal{F}$. Esto implica que $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in [0,1]$. En particular $f(0), f(1) \in [0,1]$. Luego:

$$0 \leq \frac{f(0) + f(1)}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1$$

De esto deducimos que $\varphi(f) \in [0,1]$, es decir, φ está bien definida.

b) Veamos ambas propiedades por separado.

- **Inyectividad:** No es inyectiva, en efecto sean f, g tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$. Es claro que $f \neq g$, pero:
$$\varphi(f) = \frac{1}{2} = \varphi(g)$$
- **Sobreyectividad:** Es sobreyectiva. Sea $c \in [0,1]$, consideremos la función $f(x) = c$, esta es tal que:
$$\varphi(f) = \frac{f(0) + f(1)}{2} = \frac{c+c}{2} = c$$

c) Veamos que:
$$\mathcal{I}(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = \mathcal{I}(g) \circ \mathcal{I}(f)$$

d) Veamos cada propiedad por separado:

- **Inyectividad:** Sean $f, g \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{I}(f) = \mathcal{I}(g)$, luego:
$$\begin{array}{rcll} \mathcal{I}(f) & = & \mathcal{I}(g) & \\ f^{-1} & = & g^{-1} & \quad /()^{-1} \\ f & = & g & \end{array}$$
- **Sobreyectivad:** Sea $g \in \mathcal{B}$, notemos que $g^{-1} \in \mathcal{B}$ y además $\mathcal{I}(g^{-1}) = g$ con lo que concluímos la sobreyectividad.

e) Como buscamos la preimagen de $\{0\}$, buscamos todas las funciones $f \in \mathcal{B}$ tales que:

$$(\varphi \circ \mathcal{I})(f) = 0 \iff \varphi(\mathcal{I}(f)) = 0 \iff \varphi(f^{-1}) = 0 \iff \frac{f^{-1}(0) + f^{-1}(1)}{2} = 0$$

Es decir, buscamos funciones tales que $f^{-1}(0) = f^{-1}(1) = 0$, lo que es imposible pues f es biyectiva.