MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Actividad Extra 3

5 de mayo del 2017

P1. [Conjunto Imagen y Preimagen]

Sea $f : A \to B$ una función.

a) Sea $C \subseteq B$, demuestre que $f(f^{-1}(C)) = C \cap f(A)$.

b) Demuestre que

$$f \text{ es sobreyectiva } \iff [(\forall C \subseteq B)\ \ f(f^{-1}(C)) = C]$$

P2. [Calculo de Imagen y Preimagen]

Sea $F : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$. Definida por:

$$F(X,Y) = X \setminus Y$$

a) Encuentre $F^{-1}(\{\emptyset,\mathcal{U}\})$.

b) Sea:

$$D = \{(X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) : X = Y\}$$

Encuentre $F(D)$.

P3. [Composición]

a) Sean A, B, C tres conjuntos no vacíos. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$ tales que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva.
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva
- $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva.

Demuestre que f, g, h son biyectivas.

b) Sea $\mathcal{F} = \{f : A \to A | f \text{ es función}\}$. Sea $g : A \to A$ biyectiva. Se define $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ como:

$$f \longrightarrow \varphi(f) = g \circ f$$

Pruebe que φ es biyectiva y encuentre φ^{-1}.

P4. [Relaciones de Equivalencia] Considere la siguiente relación:

$$\Phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \exists n \in \mathbb{Z},\ \text{tal que } y - x = n\}$$

a) Demuestre que Φ es una relación de equivalencia.

b) Dado $k \in \mathbb{Z}$ calcule $[k]_\Phi$.

c) Encuentre $[0{,}5]_\Phi$.

d) Encuentre $\mathbb{R}/\Phi$.

P5. [Relaciones de Orden]

a) Sea $\mathcal{F} = \{(A, f) | A \subseteq \mathbb{R} \wedge f : A \to \mathbb{R},\ \text{es función}\}$. Se define en $\mathcal{F}$ la relación Ω por

$$(A,f)\Omega(B,g) \iff \{A \subseteq B \wedge (\forall x \in A) f(x) = g(x)\}$$

(i) (2,5 ptos.) Demuestre que Ω es una relación de orden.

(ii) (0,5 pto.) ¿Es Ω un orden total en $\mathcal{F}$? Justifique.