MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 8 : Repaso Control Recuperativo

11 de mayo del 2017

Lógica

P1. Se define ahora el conectivo lógico binario $\star$ como $P \star Q =$ "ni P ni Q".

a) De una tabla de verdad para $\star$. Úsela para describir $\star$ en términos de conectivos más simples.

b) Demuestre las siguientes equivalencias:

1) $\bar{p} \iff p \star p$.
2) $p \vee q \iff (p \star q) \star (p \star q)$.
3) $p \wedge q \iff (p \star p) \star (q \star q)$.

Inducción

P2. Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, n^3, 2^n)$.

P3. Suponga que f es una función de A a B, donde A y B son conjuntos finitos con n elementos. Demuestre que f es inyectiva si y sólo si es sobreyectiva.

P4. La cadena de comida rápida McKing vende nuggets de pollo en dos modalidades:

- Una bolsa de 3 nuggets.
- Una cajita de 5 nuggets.

Demuestre que si usted quiere comprar $n \geq 8$ nuggets en McKing puede hacerlo de manera exacta (es decir hay una combinación de bolsas y cajitas tal que no le sobran ni faltan nuggets).

Conjuntos

P5. Sean A, B y C conjuntos, demuestre que:

a) $(A \triangle B) \cup C = (A \cup C) \triangle (B \setminus C)$

b) $A = B \iff \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

c) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

P6. Para todo $r \in [0, 1)$ definimos:

$$A_r = \{x \in \mathbb{R} : x - \lfloor x \rfloor = r\}$$

Demuestre que $\mathcal{P} = \{A_r\}_{r \in [0,1)}$ es una partición de $\mathbb{R}$.

P7. Sea $A \subseteq U$, $A \neq \emptyset$ fijo. Se define $\mathcal{F}_A \subseteq \mathcal{P}(U)$ por

$$\mathcal{F}_A = \{X \subseteq U : X \cap A \neq \emptyset\}$$

Demuestre que, dado $B \subseteq U$:

a) $U \in \mathcal{F}_A$, $A \in \mathcal{F}_A$.

b) Si $A \setminus B \neq \emptyset$, entonces $B^c \in \mathcal{F}_A$.

c) Si $B \in \mathcal{F}_A$ y $C \subseteq U$, entonces $(B \cup C) \in \mathcal{F}_A$.

Funciones

P8. Sea $f : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Definida como:

$$f(\mathcal{A}) = \{x \in \mathbb{R} : \exists A \in \mathcal{A} \text{ tal que } x \in A\}$$

a) Encuentre $f(\{\{1,2\},\{3,4\}\})$.

b) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de f.

P9. Sean A, B y C conjuntos y $f : A \to B$.

a) Sean $g, h : B \to C$. Demuestre que si f es sobreyectiva y $g \circ f = h \circ f$, entonces $g = h$.

b) Suponga ahora que C tiene al menos dos elementos, y que para todas las funciones $g, h : B \to C$ se tiene la propiedad:

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

Demuestre que f es sobreyectiva.

P10. Sea $f : A \to B$ una función fija. Definamos la función $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ como:

$$F(X) = f(X)$$

Es decir, es la función que a todo $X \in \mathcal{P}(A)$, le asocia su conjunto imagen $f(X)$.

a) Demuestre que si f es sobreyectiva, entonces para cada $Y \in \mathcal{P}(B)$ tenemos que:

$$f(f^{-1}(Y)) = Y$$

b) Demuestre que:

$$F \text{ es sobreyectiva} \iff f \text{ es sobreyectiva}$$

Relaciones

P11. Sean E_1, E_2 dos conjuntos no vacíos y $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ relaciones de orden definidas en E_1 y E_2 respectivamente.

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ definida en $E_1 \times E_2$ por:

$$(x,y)\mathcal{R}(u,v) \iff [x\mathcal{R}_1 u \ \wedge \ y\mathcal{R}_2 v]$$

es una relación de orden en $E_1 \times E_2$.

b) Si $|E_1| \geq 2$ y $E_2 \geq 2$ y $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ son ordenes totales. Pruebe que $\mathcal{R}$ no es un orden total.

P12. Sea $\mathcal{O}$ una relación de orden en un conjunto A. Definimos la relación $\mathcal{E}$ como:

$$a\mathcal{E}b \iff (a\mathcal{O}b \wedge b\mathcal{O}a)$$

Demuestre que $\mathcal{E}$ es una relación de equivalencia. Describa $A/\mathcal{E}$.

P13. Sea E un conjunto y $A \neq \emptyset$ un subconjunto fijo de E. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$X\mathcal{R}Y \iff A \cap X = A \cap Y$$

a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

b) Demuestre que $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{[X]_\mathcal{R} : X \in \mathcal{P}(A)\}$.

c) Demuestre que para $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ se tiene que $X \neq Y \implies [X]_\mathcal{R} \neq [Y]_\mathcal{R}$