MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 9 : Sumatorias

23 de mayo del 2017

P1. **[Reconocer sumas conocidas]**
Calcule las siguientes sumatorias:

$a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$ $\qquad b)\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+nk)(k-n)$

Solución 1.

a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) &= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} \\ &= n(n-1)\left(\frac{2n-1}{6} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{n(n-1)(2n+2)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{3}\end{aligned}$$

b) PENDIENTE.

P2. [Acotamiento e Inducción]
Se definen los números armónicos como:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Demuestre que

$$1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n} \leq 1 + n$$

Solución 2. Demostremos primero que $1 + \frac{n}{2} \leq H_{2^n}$:

- **Caso Base:** $(n = 0)$

$$H_{2^0} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 \geq 1 + \frac{0}{2}$$

- **Hipótesis Inductiva:**
  $H_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
- **Paso Inductivo:**
  Probemoslo para el caso $n+1$. Notemos que:

$$H_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j}}_{(2)}$$

Por H.I. tenemos que $(1) \geq 1 + \frac{n}{2}$ y notemos como la sucesión $\frac{1}{j}$ es decreciente podemos minorar los términos la suma de (2) por $\frac{1}{2^{n+1}}$ es decir nos queda:

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\geq 1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{n}{2} + (2^{n+1} - 2^n)\frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{n}{2} + \frac{2^n(2-1)}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

De donde concluimos el resultado.

Demostremos ahora que $H_{2^n} \leq 1 + n$:

- **Caso Base:** $(n = 0)$

$$H_{2^0} = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = 1 \leq 1 + 0$$

- **Hipótesis Inductiva:**
  $H_{2^n} \leq 1 + n$.
- **Paso Inductivo:**
  Probemoslo para el caso $n+1$. Nuevamente separemos la suma en dos partes:

$$H_{2^{n+1}} = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j}}_{(2)}$$

Por H.I. tenemos que (1) $\leq 1+n$ y notemos como la sucesión $\frac{1}{j}$ es decreciente podemos mayorar los términos la suma de (2) por $\frac{1}{2^n+1}$ es decir nos queda:

$$\begin{aligned}
(1)+(2) &\leq 1+n+\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^n+1} \\
&= 1+n+(2^{n+1}-2^n)\frac{1}{2^n+1} \\
&= 1+n+\frac{2^n(2-1)}{2^n+1} \\
&= 1+n+\frac{2^n}{2^n+1}+\underbrace{\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^n+1}}_{0} \\
&= 1+n+1-\frac{1}{2^n+1} \\
&\leq 1+(n+1)
\end{aligned}$$

De esto concluimos el resultado.
Obs : Notemos que esto implica que la sucesión H_n no es acotada, pero crece extremadamente lento. En efecto estas cotas nos dan que $H_{2^{20}} = H_{1048576}$ es tal que:

$$11 \leq H_{1048576} \leq 21$$

De hecho $H_{1048576} \sim 14{,}4$.

P3. [Cambio de Indice]

Para $m \geq 1$ calcule $\displaystyle\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$

Solución 3.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} 2i-1 &= \sum_{i=0}^{m-1} 2\left(i+\frac{m(m-1)}{2}+1\right)-1 \\
&= 2\sum_{i=0}^{m-1} i + \sum_{i=0}^{m-1} m(m-1)+1 \\
&= \frac{m(m-1)}{2} + m(m(m-1)+1) \\
&= m^2 - m + m^3 - m^2 + m \\
&= m^3
\end{aligned}$$

Obs: Esto se conoce como el teorema de Nicómaco y se puede reescribir de manera más agradable cómo:

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1 \\
2^3 &= 3+5 \\
3^3 &= 7+9+11 \\
4^3 &= 13+15+17+19 \\
5^3 &= 21+23+25+27+29 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

este teorema además provee una demostración "corta" de la fórmula para la suma de cubos.

P4. [Racionalización]

Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$.

Solución 4. Racionalizando tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(k+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}}_{\text{Telescópica}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

P5. [Fracciones Parciales]
Calcule:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ *b)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$ *c)* $\displaystyle\sum_{i=5}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{i+1}{j(j+1)}$

Solución 5.

a) Supongamos que:

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k-1}$$

Veamos si esto ocurre para algunos valores de A y B, en efecto:

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{k-1} = \frac{A(k-1)+Bk}{k(k-1)} = \frac{(A+B)k-A}{k(k-1)}$$

De esto tenemos las ecuaciones $A+B=0$ y $-A=1$, de esto tenemos $A=-1$ y $B=1$. Reescribiendo la suma tenemos:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}_{\text{Telescópica}} = 1 - \frac{1}{n}$$

b) PENDIENTE

c) Haciendo fracciones parciales en $\frac{1}{j(j+1)}$ tenemos:

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{A}{j} + \frac{B}{j+1} = \frac{A(j+1)+Bj}{j(j+1)} = \frac{(A+B)j+A}{j(j+1)}$$

De esto tenemos las ecuaciones $A+B=0$ y $A=1$. Por tanto $A=1$ y $B=-1$, calculemos ahora la suma:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=5}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{i+1}{j(j+1)} &= \sum_{i=5}^{n}(i+1) \underbrace{\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j(j+1)}}_{\text{Fracciones Parciales}} \\
&= \sum_{i=5}^{n}(i+1) \underbrace{\sum_{j=1}^{i} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}\right)}_{\text{Telescópica}} \\
&= \sum_{i=5}^{n}(i+1)\left(1 - \frac{1}{i+1}\right) \\
&= \sum_{i=5}^{n} i \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} i}_{\text{Gauss}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{4} i}_{\text{Gauss}} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} - 10 \\
&= \frac{n^2+n-20}{2} \\
&= \frac{(n-4)(n+5)}{2}
\end{aligned}$$

P6. [Telescópica]
Calcule:

$a) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$ $\qquad b) \displaystyle\sum_{k \text{ impar}}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+2k+1}+\sqrt[3]{k^2-1}+\sqrt[3]{k^2-2k+1}}$ $\qquad c) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{(k+2)!}$ $\qquad d) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(2k)$

Solución 6.

a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k!\\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot k! - k!\\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(k+1)! - k!}_{\text{Telescópica}}\\ &= (n+1)! - 1\end{aligned}$$

b) Para facilitarnos la vida, definamos $a = \sqrt[3]{k+1}$, $b = \sqrt[3]{k-1}$. Notemos entonces que lo de adentro de la suma es:

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2} = \frac{1}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a-b}{a-b} = \frac{a-b}{a^3-b^3} = \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k-1})$$

Aplicando esto en la suma:

$$\begin{aligned}\sum_{k \text{ impar}}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k^2+2k+1}+\sqrt[3]{k^2-1}+\sqrt[3]{k^2-2k+1}} &= \sum_{k \text{ impar}}^{n} \frac{1}{2}(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k-1})\\ &= \frac{1}{2}\sum_{k \text{ impar}}^{n} \underbrace{(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k-1})}_{\text{Telescópica}}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{n+1}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{(k+2)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2-2)2^k}{(k+2)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+2)2^k}{(k+2)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{2^k}{(k+1)!} - \frac{2^{k+1}}{(k+2)!}}_{\text{Telescópica}}\\ &= \frac{2^1}{(1+1))!} - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\\ &= 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}\end{aligned}$$

d) Recordemos la formula del producto de sin:

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

Tomando $\alpha = 2k$ y $\beta = 1$ tenemos que:

$$2\sin(2k)\sin(1) = \cos(2k-1) - \cos(2k+1) = \cos(2k-1) - \cos(2(k+1)-1)$$

Aplicando esto en la suma tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \sin(2k) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k-1) - \cos(2(k+1)-1)}{2\sin 1} \\
&= \frac{1}{2\sin 1} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\cos(2k-1) - \cos(2(k+1)-1)}_{\text{Telescópica}} \\
&= \frac{1}{2\sin 1}(\cos(1) - \cos(2(n+1)-1)) \\
&= \frac{1}{2\sin 1}(\cos(1) - \cos(2n+1))
\end{aligned}$$

P7. [Suma por casos]
Se pide calcular en función de n, el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2,$$

procediendo como se indica:

(i) Escriba la suma de los términos pares, usando $k = 2i$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.
(ii) Escriba la suma de los términos impares, usando $k = 2i - 1$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Solución 7.

(i)

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i}(2i)^2 = 4\sum_{i=1}^{n} i^2 = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}(2i-1)^2 &= \sum_{i=1}^{n} -4i^2 + 4i - 1 \\ &= -4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= -4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= -4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n(n+1) - n\end{aligned}$$

Sumando el resultado de 1) y de 2) obtenemos:

$$(1) + (2) = 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n(n+1) - n = 2n(n+1) - n = 2n^2 + n$$

Que es el valor de la suma pedida.

P8. [Armar el teorema del Binomio]
Demuestre $\circledast$ y calcule las sumatorias:

$\circledast$ $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

b) Dado $p \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k(k-1)7^k}{n}\binom{n}{k}$.

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}(k-2)\binom{n+3}{k}$.

Solución 8.

($\circledast$)

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(n-1-(k-1))!(k-1)!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{k\binom{n}{k}}_{(\circledast)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\ &= n\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^k 1^{n-1-k}}_{\text{Teo. Binomio}} \\ &= n(1+1)^{n-1} \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \underbrace{k\binom{n}{k}}_{\circledast} p^k(1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}p^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)} \\
&= np\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1+k}}_{\text{Teo. Binomio}} \\
&= np(p+1-p)^{n-1} \\
&= pn
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-2}\frac{k(k-1)7^k}{n}\binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^{n-2}\frac{(k-1)7^k}{n}\underbrace{k\binom{n}{k}}_{\circledast} \\
&= \sum_{k=2}^{n-2}\frac{(k-1)7^k}{n}n\binom{n-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=2}^{n-2}7^k\underbrace{(k-1)\binom{n-1}{k-1}}_{\circledast} \\
&= \sum_{k=2}^{n-2}7^k(n-1)\binom{n-2}{k-2} \\
&= (n-1)\sum_{k=0}^{n-4}\binom{n-2}{k}7^{k+2} \\
&= (n-1)7^2\sum_{k=0}^{n-4}\binom{n-2}{k}7^k \\
&= (n-1)7^2\left[\underbrace{7^{n-3}\binom{n-2}{n-3}+7^{n-2}-7^{n-3}\binom{n-2}{n-3}-7^{n-2}}_{=0}+\sum_{k=0}^{n-4}\binom{n-2}{k}7^k\right] \\
&= (n-1)7^2\left[-7^{n-3}\binom{n-2}{n-3}-7^{n-2}+\underbrace{\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}7^k1^{n-2-k}}_{\text{Teo. Binomio}}\right] \\
&= (n-1)7^2\left[-7^{n-3}\binom{n-2}{n-3}-7^{n-2}+8^{n-2}\right]
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}(k-2)\binom{n+3}{k} &= \sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}\underbrace{k\binom{n+3}{k}}_{\circledast} -2\sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}\binom{n+3}{k} \\
&= (n+3)\sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}\binom{n+2}{k-1} - 2\sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}\binom{n+3}{k} \\
&= (n+3)\sum_{k=2}^{n+2}(-1)^{k-2}\binom{n+2}{k} - 2\sum_{k=3}^{n+3}(-1)^{k-3}\binom{n+3}{k} \\
&= (n+3)\sum_{k=0}^{n+2}(-1)^{k-2}\binom{n+2}{k} - 2\sum_{k=0}^{n+3}(-1)^{k-3}\binom{n+3}{k} + \%
\end{aligned}$$

Donde

$$\% = -(n+3)\left(1-\binom{n+2}{1}\right) + 2\left(-1+\binom{n+3}{1}-\binom{n+3}{2}\right)$$

Continuemos con el calculo anterior:

$$\begin{aligned}
&= (n+3)\sum_{k=0}^{n+2}(-1)^{k-2}\binom{n+2}{k} - 2\sum_{k=0}^{n+3}(-1)^{k-3}\binom{n+3}{k} + \% \\
&= (n+3)\underbrace{\sum_{k=0}^{n+2}\binom{n+2}{k}(-1)^k 1^{n+2-k}}_{\text{Teo. Binomio}} +2\underbrace{\sum_{k=0}^{n+3}\binom{n+3}{k}(-1)^k 1^{n+3-k}}_{\text{Teo. Binomio}} +\% \\
&= (n+3)(-1+1)^{n+2} + 2(-1+1)^{n+3} + \% \\
&= \% \\
&= -(n+3)\left(1-\binom{n+2}{1}\right) + 2\left(-1+\binom{n+3}{1}-\binom{n+3}{2}\right) \\
&= -(n+3) + \underbrace{(n+3)\binom{n+2}{1}}_{\circledast} -2 + 2\binom{n+3}{1} - 2\binom{n+3}{2} \\
&= -(n+3) + 2\binom{n+3}{2} - 2 + 2\underbrace{\binom{n+3}{1}}_{=n+3} -2\binom{n+3}{2} \\
&= n+3-2 = n+1
\end{aligned}$$

P9. [Sumas multiples]

a) Calcule:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right).$$

b) Sea $b \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}$. Calcule la siguiente suma:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}b^i$$

c) Calcule:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{8^{k+1}}{3^j}$$

d)

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}k\binom{n}{k}\binom{n}{j}a^{k+j-1}$$

Solución 9.

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{j}k}_{\text{Gauss}}+\underbrace{\frac{2^j}{j}\sum_{k=1}^{j}1}_{\text{Suma de unos}}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}+j\frac{2^j}{j}\\
&= \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{2}+\frac{j}{2}+2^j}_{\text{Cuadrados, Gauss y Geom.}}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2^{n+1}-2}{1}\\
&= \frac{n(n+1)}{4}\left[\frac{2n+1}{3}+1\right]+2^{n+1}-2\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}+2^{n+1}-2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}b^i &= \sum_{i=0}^{n} b^i \underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{i}{j}}_{\text{Como } 0\leq i\leq n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} b^i\left(\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j} + \underbrace{\sum_{j=i+1}^{n}\binom{i}{j}}_{=0}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} b^i \underbrace{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}1^j 1^{i-j}}_{\text{Teo. Binomio}} \\
&= \sum_{i=0}^{n} b^i (1+1)^i \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{n}(2b)^i}_{\text{Geométrica pues } b\neq\frac{1}{2}} \\
&= \frac{(2b)^{n+1}-1}{2b-1}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}\frac{8^{k+1}}{3^j} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{8}{3^j}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}8^k \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{8}{3^j}\underbrace{\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}8^k 1^{j-k}}_{\text{Teo. Binomio}} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}\frac{8}{3^j}9^j \\
&= 8\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\sum_{j=0}^{i}3^j}_{\text{Geométrica}} \\
&= 8\sum_{i=0}^{n}\frac{3^{i+1}-1}{2} \\
&= 4\underbrace{\left(3\sum_{i=0}^{n}3^i - \sum_{i=0}^{n}1\right)}_{\text{Geométrica y suma de 1's}} \\
&= 4\left(3\frac{3^{n+1}-1}{2} - (n+1)\right) \\
&= 2\left(3^{n+2}-3-2n-2\right) \\
&= 2\cdot 3^{n+2} - 10 - 4n
\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{j}a^{k+j-1} &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{j}a^{k-1}a^{j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}a^{k-1}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{j}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}a^{k-1}\left[\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a^{j}1^{n-j}}_{\text{Teo. Binomio}}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}a^{k-1}[1+a]^{n} \\
&= (1+a)^{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{k\binom{n}{k}}_{\circledast}a^{k-1} \\
&= (1+a)^{n}n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}a^{k-1} \\
&= (1+a)^{n}n\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^{k}1^{n-1-k}}_{\text{Teo. Binomio}} \\
&= n(1+a)^{n}(1+a)^{n-1} \\
&= n(1+a)^{2n-1}
\end{aligned}
$$

P10. [Reescribir]

a) Calcule la siguiente suma:

$$a + aa + aaa + aaaa + \ldots + \underbrace{aa\ldots aa}_{n \text{ a's}}$$

Donde a es un dígito.
Hint: Le puede ser útil calcular primero el caso $a = 9$.

b) Considere, para $n \in \mathbb{N}$, la suma

$$S \ = \ 1 \ + \ \frac{1+2}{3} \ + \ \frac{1+2+3}{3} \ + \ \ldots \ + \ \frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$$

Escriba S como una sumatoria doble y calcule su valor.

Solución 10.

a) Siguiendo el hint, demostremos el caso $n = 9$ primero. Notemos que:

$$9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots 99}_{n \text{ 9's}} = (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \ldots + (10^n - 1) = \sum_{k=1}^{n}(10^k - 1)$$

Calculemos esta última suma:

$$\sum_{k=1}^{n}(10^k - 1) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 10^k}_{\text{Geométrica}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{\text{Suma de 1's}}$$
$$= \frac{10^{n+1} - 10}{9} - n$$

Volvamos al problema original. En efecto:

$$\begin{aligned} a + aa + aaa + aaaa + \ldots + \underbrace{aa\ldots aa}_{n \text{ a's}} &= a(1 + 11 + 111 + 1111 + \ldots + \underbrace{11\ldots 11}_{n \text{ 1's}}) \\ &= \frac{a}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots 99}_{n \text{ 9's}}) \\ &= \frac{a}{9}\left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n\right) \end{aligned}$$

b) Notemos que:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{1} i}{1} + \frac{\sum_{i=1}^{2} i}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{3} i}{3} + \ldots + \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{j} i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i$$

Calculemos S

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] = \frac{1}{2}\left[n\frac{(n+3)}{2}\right] = \frac{1}{4}n(n+3) \end{aligned}$$

P11. [Perturbación I]

Queremos calcular $\sum_{k=0}^{n} k2^k$ para esto calcule:

$$\sum_{k=0}^{n} k2^k + (n+1)2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}(k+1)2^{k+1}$$

y llegue a una ecuación para $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

Obs: La idea de agregar el término siguiente y llegar a una ecuación se conoce como método de la perturbación

Solución 11. PENDIENTE

P12. [Intercambio de sumas I]
Demuestre que si a_n es una secuencia, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:j=0 \mod i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i \text{ divide a } j} a_{i,j}$$

Hint: Note que no puede intercambiar las sumas pues los indices no son independientes, independícelos definiendo una cantidad $c_{i,j}$ apropiada.

Solución 12. PENDIENTE

P13. [Perturbación II]
Definimos, para $n \geq 1$, $r \neq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kr^k.$$

a) Demuestre, sin usar inducción que:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}.$$

Hint: *Use cambio de índices en* S_n.

b) Pruebe, nuevamente sin uso de inducción, que:

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} - nr^{n+2}}{(1-r)^2}.$$

Solución 13.

a) Siguiendo el Hint:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} kr^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)r^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} kr^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} kr^{k+1}\right) + \underbrace{nr^{n+1} - nr^{n+1}}_{=0} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} kr^{k+1}\right) - nr^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= \underbrace{0 \cdot r^{0+1}}_{=0} + r\left(\sum_{k=1}^{n} kr^k - nr^n\right) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1} \\
&= r(S_n - nr^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}
\end{aligned}$$

b) Calculando la Geométrica de la parte anterior tenemos:

$$S_n = r(S_n - nr^n) + \sum_{k=1}^{n} r^k \implies S_n = rS_n - nr^{n+1} + \frac{r^{n+1} - r}{r - 1}$$

Trabajando esto un poco tenemos:

$$\begin{aligned}
S_n(1-r) &= -nr^{n+1} + \frac{r - r^{n+1}}{1-r} \\
&= \frac{-nr^{n+1}(1-r)}{1-r} + \frac{r - r^{n+1}}{1-r} \\
&= \frac{-nr^{n+1} + nr^{n+2} + r - r^{n+1}}{1-r} \\
&= \frac{r - (n+1)r^{n+1} + nr^{n+2}}{1-r}
\end{aligned}$$

Dividiendo por $(1 - r)$ se concluye.

P14. [Coeficientes]

a) Determine el valor de k si los coeficientes de x^k y de x^{k+1} en el desarrollo de $(3x+2)^{14}$ son iguales.

b) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{17} en $(1+x^5+x^7)^{20}$.

c) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{12} en $(1+x^2+x^5+x^7)^{25}$.

Solución 14.

a) Por el teorema del binomio:

$$(3x+2)^14 = \sum_{j=0}^{14} \binom{14}{j} (3x)^j 2^{14-j}$$

Luego si el coeficiente que acompaña a k y a $k+1$ son iguales tenemos que:

$$\begin{aligned}
\binom{14}{k} 3^k 2^{14-k} &= \binom{14}{k+1} 3^{k+1} 2^{14-k-1} \\
\binom{14}{k} 2 &= \binom{14}{k+1} 3 \\
\frac{14!}{k!(14-k)!} 2 &= \frac{14!}{(k+1)!(14-k-1)!} 3 \\
\frac{1}{k!(14-k)!} 2 &= \frac{1}{(k+1)!(14-k-1)!} 3 \\
\frac{(k+1)!}{k!} 2 &= \frac{(14-k)}{(14-k-1)!} 3 \\
2(k+1) &= 3(14-k) \\
2k+2 &= 42-k
\end{aligned}$$

De esta última ecuación concluimos que $k=8$.

b) Lo resolveremos de dos formas, una primera usando iterativamente el teorema del Binomio y una segunda usando argumentos combinatoriales. Usando el teorema del binomio tenemos:

$$\begin{aligned}
(1+\underbrace{x^5+x^7}_{p})^{20} &= \underbrace{(1+p)^{20}}_{\text{Teo. Binomio}} \\
&= \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} 1^{20-i} p^i \\
&= \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} \underbrace{(x^5+x^7)^i}_{\text{Teo. Binomio}} \\
&= \sum_{i=0}^{20} \binom{20}{i} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^{5(i-j)} x^{7j} \\
&= \sum_{i=0}^{20} \sum_{j=0}^{i} \binom{20}{i} \binom{i}{j} x^{5(i-j)} x^{7j}
\end{aligned}$$

Notemos que la única forma de formar 17 con los exponentes que tenemos es como $2 \cdot 5 + 1 \cdot 7 = 17$, es decir necesitamos que:

$$j=1, \quad i-j=2 \implies j=1, i=3$$

Luego tenemos que el coeficiente que acompaña a x^{17} es:

$$\binom{20}{3}\binom{3}{1} = \frac{20!}{3!17!}\frac{3!}{1!2!} = \frac{20!}{17!2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{10} = 10 \cdot 19 \cdot 18 = 3420$$

Otra forma de hacerlo es mediante el siguiente argumento combinatorial. Notemos que nosotros tenemos el siguiente producto:

$$(1+x^5+x^7)(1+x^5+x^7)\underbrace{\dots}_{20 \text{ veces}}(1+x^5+x^7)$$

Notemos que cada vez que obtenemos un término de este producto lo que hacemos es elegir 1 elemento de cada paréntesis y multiplicarlos juntos. Nuevamente para obtener 17 tenemos que elegir dos x^5 y un x^7. ¿De cuantas maneras se puede hacer esto? Notemos que los x^5 los podemos elegir de $\binom{20}{2}$ maneras (pues esto es elegir 2 elementos entre 20) y al hacer esto hay dos parentesis que no se pueden ocupar, luego elegir el x^7 se puede hacer de 18 formas, por tanto el total de formas de formar x^{17} (y por tanto el coeficiente que acompaña al x^{17}) es:

$$\binom{20}{2}18 = \frac{20!}{2!20!}18 = \frac{20 \cdot 19}{2} \cdot 18 = 10 \cdot 19 \cdot 18 = 3420$$

c) No lo haremos mediante el teorema del binomio (pues hay que hacer 3 teoremas del Binomio). Nuevamente tenemos un producto del estilo:

$$(1+x^2+x^5+x^7)(1+x^2+x^5+x^7)\underbrace{\dots}_{25 \text{ veces}}(1+x^2+x^5+x^7)$$

¿De cuantas maneras podemos formar 12? De las siguientes formas:

$$12 = 6 \cdot 2, \quad 12 = 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2, \quad 12 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 7$$

Notemos que para la primera forma tenemos que elegir 6 dos entre los 25 paréntesis, esto se puede hacer de $\binom{25}{6}$ maneras.
Para la segunda forma tenemos que elegir 2 cincos y un dos entre los 25 paréntesis, esto se puede hacer de $\binom{25}{2}23$ maneras.
Para la última forma hay que elegir un cinco y un siete, esto se puede hacer de $25 \cdot 24$ maneras.
Por último cada una de estas opciones aporta a formar coeficientes para x^{12}, por lo tanto el coeficiente que acompaña a x^{12} es:

$$\binom{25}{6} + \binom{25}{2}23 + 25 \cdot 24 = \frac{25!}{6!19!} + \left(\frac{25!}{2!23!}\right) + 25 \cdot 24 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{25 \cdot 24}{3 \cdot 2} + 25 \cdot 24$$

Simplificando tenemos:

$$5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 7 \cdot 10 + 25 \cdot 4 + 25 \cdot 24 = 177100 + 100 + 600 = 177800$$

P15. [Expandir y Contraer]
Argumente que:

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{j=1}^{k} \sum_{k=j}^{n} 2^k$$

Use esto para calcular la suma del lado izquierdo.
Obs: Este método de reescribir una suma como una suma doble se conoce como expandir y contraer.

Solución 15. PENDIENTE

P16. [Técnicas]
Calcule $\sum_{k=1}^{n} k^2$ mediante perturbación y expandir y contraer.

Solución 16. Veamos que pasa si perturbamos k^2 con el término siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} k^2\right] + 2\left[\sum_{k=0}^{n}\right] + (n+1)\end{aligned}$$

Notemos que esto no funciona, pues se van a ambos lados $\left[\sum_{k=0}^{n} k^2\right]$ que era la suma que queriamos calcular, a pesar de eso concluimos la fórmula para la suma de k al perturbar k^2.¿Que pasa si perturbamos k^2?

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1\end{aligned}$$

Notemos que de esta último podemos despejar la suma de los k^2. Tenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - 3\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)\right)\end{aligned}$$

que era lo pedido. Resolvamosla ahora mediante expandir y contraer:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{k + k + \cdots + k}_{k \text{ veces}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{k} k\end{aligned}$$

Definamos para intercambiar las sumas a c_{jk} como:

$$c_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq j \leq k \leq n \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Sigamos calculando la suma pedida:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{k} k &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{k} c_{jk}k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{jk}k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n} c_{jk}k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} k \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} k+j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-j} k + \sum_{k=0}^{n-j} j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(n-j)(n-j+1)}{2} + j(n-j+1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+j)(n-j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(n^2 - nj + n + jn - j^2 + j) \\
&= \frac{-1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j^2\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} n^2 + n\right] \\
&= \frac{-1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j^2\right] + \frac{1}{4}n(n+1) + \frac{1}{2}(n^3 + n^2)
\end{aligned}$$

Si llamamos S a la suma buscada tenemos la siguiente ecuación:

$$S = \frac{-1}{2}S + \frac{1}{4}n(n+1) + \frac{1}{2}(n^3 + n^2)$$

De donde se puede despejar S.

P17. [Intercambio de sumas II]
Demuestre que

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}=\frac{10^n-1}{9}$$

Hint: Para demostrar lo anterior debe intercambiar las sumas. Para ello defina la cantidad

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \textit{si } 0\leq j\leq i\leq n-1\\ 0 & \textit{si no}\end{cases}$$

para $i\in\{0,\ldots,n-1\}$, $j\in\{0,\ldots,n-1\}$ *y úsela en forma adecuada.*

Solución 17.

a) Notemos que:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j}^{n-1}c_{ij}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}c_{ij}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}$$

Notemos que como c_{ij} vale 1 cuando $0\leq j\leq i\leq n-1$ y 0 cuando no las igualdades anteriores son válidas. Esto se hace con el fin de que los indices queden independientes unos de otros (antes teníamos $i=j$ en el indice de la suma de la derecha). Una vez hecho esto podemos intercambiar las sumas:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}c_{ij}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}c_{ij}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}$$

Veamos además que como $c_{ij}=0$ si $i>j$, entonces:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}c_{ij}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j}$$

Esta última suma la podemos calcular por los métodos que ya conocemos. En efecto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}2^{i+j}3^{i-j} &= \sum_{i=0}^{n-1}2^i\underbrace{\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}2^{j}3^{i-j}}_{\text{Teo. Binomio}}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}2^i(2+3)^i\\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}(10)^i}_{\text{Geométrica}}\\ &= \frac{10^n-1}{9}\end{aligned}$$

De donde concluimos lo pedido.