MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 14 : Divisores del Cero, Cuerpos y Complejos

22 de julio del 2017

P1. [Anillos Booleanos]
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo booleano, esto es, $(A, +, \cdot)$ es un anillo que verifica $a^2 = a$ para todo $a \in A$. Demuestre que:

a) Para todo $x \in A$ se tiene que $x = -x$.

b) $(A, +, \cdot)$ es conmutativo.

c) Para todo $x, y \in A$ se tiene que $(x \cdot y) \cdot (x + y) = 0$.

d) Ningún anillo booleano con más de tres elementos es cuerpo. ¿Que pasa si el anillo tiene dos elementos ?

Solución 1.

a) Notemos que lo anterior es lo mismo que demostrar que $x + x = 0$. En efecto:

$$(x + x) = (x + x)^2 = x^2 + x^2 + x^2 + x^2 = x + x + x + x$$

Luego:

$$x + x = x + x + x + x \implies x + x = 0$$

Que era lo buscado.

b) Veamos que:

$$(x^2 + y^2) = (x + y) = (x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + yx + y^2$$

De esto concluimos que:

$$0 = xy + yx \implies xy = -yx = (-y)x = yx$$

Donde se ocupo la propiedad demostrada anteriormente.

c) Ocuparemos las propiedades que ya demostramos:

$$xy(x + y) = xyx + xyy = x^2y + xy^2 = xy + xy = 0$$

d) Notemos que si un anillo tiene 3 elementos, alguno de ellos no es ni 0 ni 1. Como el anillo es booleano tenemos que dicho elemento es idempotente, es decir:

$$\begin{aligned} x^2 &= x \\ x^2 - x &= 0 \\ \underbrace{x}_{\neq 0}\underbrace{(x - 1)}_{\neq 0} &= 0 \end{aligned}$$

De esto concluimos que este elemento es divisor del cero, y por tanto el anillo no puede ser un cuerpo. Si el anillo tiene 2 elementos la proposición falla pues basta con notar que $(\mathbf{Z}_2, +_2, \cdot_2)$ es booleano.

P2. [Producto de Cuerpos]
Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Definimos las siguientes operaciones sobre $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d) \qquad (a, b) \oplus (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

Se sabe por propiedades de herencia de la estructura producto que $(\mathbb{K}\times\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo con unidad (¡no lo demuestre!).

a) Encuentre el neutro para $\oplus$ y el neutro para $\odot$.

b) Demuestre que $\forall (a, b) \in (\mathbb{K} \times \mathbb{K}) \setminus \{0_{\mathbb{K}\times\mathbb{K}}\}$:

$$(a, b) \text{ es divisor del } 0 \iff (a, b) \text{ no es invertible}$$

c) ¿Es $(\mathbb{K} \times \mathbb{K}, \oplus, \odot)$ un cuerpo? Argumente.

Solución 2.

a) El neutro para $\oplus$ es $(0, 0)$, pues:

$$(a, b) \oplus (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

Y el neutro para $\odot$ es $(1, 1)$, pues:

$$(a, b) \odot (1, 1) = (a \cdot 1, b \cdot 1) = (a, b)$$

Obs: Chequeamos solo por un lado, pues la operaciones son conmutativos.

b)
- $(\implies)$:
Como (a, b) es divisor del 0, entonces existe $(c, d) \neq (0, 0)$ tal que $(a, b) \odot (c, d) = (0, 0)$. Supongamos que (a, b) es invertible, luego:

$$(a, b) \odot (c, d) = (0, 0) \implies (a, b)^{-1} \odot (a, b) \odot (c, d) = (a, b)^{-1} \odot (0, 0) \implies (c, d) = (0, 0)$$

Lo que es una contradicción. Por tanto (a, b) no es invertible.
- $(\impliedby)$:
Notemos primero que:

$$\begin{aligned}
& (a, b) \text{ es invertible} \\
\iff\ & \exists (c, d), \text{ tal que } (a, b) \odot (c, d) = (1, 1) \\
\iff\ & \exists (c, d), \text{ tal que } (a \cdot c, b \cdot d) = (1, 1) \\
\iff\ & \exists c, d \text{ , tal que } a \cdot c = 1 \text{ y } b \cdot d = 1 \\
\iff\ & a \text{ es invertible y } b \text{ es invertible} \\
\iff\ & a \neq 0 \text{ y } b \neq 0
\end{aligned}$$

Donde en el último paso ocupamos el hecho de que los elementos invertibles en un cuerpo son los distintos de 0. De esto tenemos que si (a, b) no es invertible, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Pongamonos en casos:
  - **Caso 1:** $(a = 0)$
  Si $a = 0$, entonces $(a, b) = (0, b)$, luego:
  $$(0, b) \odot (1, 0) = (0 \cdot 1, b \cdot 0) = (0, 0)$$
  Por tanto (a, b) es un divisor del 0.
  - **Caso 2:** $(b = 0)$
  Si $b = 0$, entonces $(a, b) = (a, 0)$, luego:
  $$(a, 0) \odot (0, 1) = (a \cdot 0, 0 \cdot 1) = (0, 0)$$
  Por tanto (a, b) es un divisor del 0.

Concluimos entonces que en cualquier caso (a, b) es divisor del 0.

c) No es un cuerpo, pues posee divisores del 0. Por ejemplo $(1, 0) \odot (0, 1) = (0, 0)$.

P3. [Morfismos]
Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$, se define el conjugado de un complejo como $\overline{z} = a - bi$.
Se define $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \overline{z}$. Demuestre que f es automorfismo en $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Solución 3. PENDIENTE

P4. [Forma Cartesiana]
Exprese de la forma $a + bi$ los siguientes complejos:

$$(1-i)^4(1+i)^4 \qquad 1+i+\frac{i-1}{|i-1|^2+i} \qquad \frac{(1+i)^{2017}}{(1-i)^{2017}}$$

Donde si $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.
Obs : lo anterior se conoce como el modulo *de un número complejo y en virtud del teorema de Pitágoras es una noción de distancia.*

Solución 4. Para el primero tenemos que:

$$\begin{aligned}(1-i)^4(1+i)^4 &= ((1-i)(1+i))^4 \\ &= (1^2-i^2)^4 \\ &= 2^4 \\ &= 16\end{aligned}$$

Mientras que para el segundo:

$$\begin{aligned}1+i+\frac{i-1}{|i-1|^2+i} &= 1+i+\frac{i-1}{(i-1)\overline{(i-1)}+i} \\ &= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)(1+i)+i} \\ &= (1+i)\frac{2+i}{2+i}+\frac{i-1}{2+i} \\ &= \frac{1+3i+i-1}{2+i} \\ &= 4i(2+i)^{-1} \\ &= 4i\frac{\overline{(2+i)}}{|2+i|^2} \\ &= 4i\frac{(2-i)}{5} \\ &= \frac{4}{5}+\frac{8}{5}i\end{aligned}$$

Y para el tercero:

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^{2017}}{(1-i)^{2017}} &= \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^{2017} \\ &= \left(\frac{1+2i+i^2}{2}\right)^{2017} \\ &= \left(\frac{2i}{2}\right)^{2017} \\ &= i^{2017}\end{aligned}$$

Notando que $2017 = 4 \cdot 504 + 1$ continuamos:

$$i^{2017} = i^{4\cdot 504+1} = (i^4)^{504} i = 1^{504} i = i$$

P5. [Ecuación con Complejos]

Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} = 1+i$$

Solución 5. Notemos primero que para que la ecuación anterior tenga sentido alguno entre a y b debe ser no nulo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+ib} + \frac{2}{a-ib} &= 1+i \\
\frac{a-ib+2(a+ib)}{(a+ib)(a-ib)} &= 1+i \\
\frac{3a+ib}{a^2-i^2b^2} &= 1+i \\
\frac{3a+ib}{a^2+b^2} &= 1+i \\
3a+ib &= a^2+b^2+i(a^2+b^2)
\end{aligned}$$

Igualando partes reales e imaginarias tenemos que:

$$3a = a^2+b^2 \qquad b = a^2+b^2$$

De esto tenemos que $3a = b$. Reemplazando esto en la primera ecuación tenemos que:

$$3a = a^2 + 9a^2 \implies 0 = 10a^2 - 3a \implies 0 = a(10a-3)$$

De donde vemos que la solución $a = 0$, lleva a que $b = 0$ lo que no es solución de la ecuación original. Por tanto $a = 3/10$ y $b = 9/10$.

P6. [Ideales]
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo. Un subconjunto $I \subseteq A$ se dirá **Ideal** de A si y sólo si:

(i) $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$.
(ii) $(\forall\, a \in A)\,(\forall\, b \in I)\; a \cdot b \in I \;\wedge\; b \cdot a \in I$.

(a) Sea $F : (A, +, \cdot) \longrightarrow (B, \oplus, \odot)$ un morfismo de anillos. Demuestre que la preimagen $F^{-1}(\{0_B\})$ es un Ideal de A, donde $0_B \in B$ es el neutro para $\oplus$ en B.

(b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$, e I un ideal de A.
   1) Demuestre que si $1 \in I$, entonces $I = A$
   2) Demuestre que si $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$ en A, entonces $I = A$

Solución 6.

a) Demostremos que $F^{-1}(\{0\})$ satisface ambas propiedades.

(i) Queremos demostrar que $(F^{-1}(\{0_B\}), +)$ es un subgrupo de $(A, +)$. Es claro que $F^{-1}(\{0\}) \neq \emptyset$ debido a que $F(0_A) = 0_B$, es decir $0_A \in F^{-1}(\{0_B\})$. Sean entonces $x, y \in F^{-1}(\{0_B\})$, es decir $F(x) = 0_B$ y $F(y) = 0_A$. Entonces:

$$F(x + (-y)) = F(x) \oplus F(-y) = F(x) \oplus [-F(y)] = 0_B \oplus (-0_B) = 0_B$$

Es decir $(x + (-y)) \in F^{-1}(\{0\})$. Por el teorema de caracterización de subgrupo tenemos que $(F^{-1}(\{0\}), +)$ es un subgrupo de $(A, +)$.

(ii) Sea $a \in A$ y $b \in F^{-1}(\{0\})$ (es decir $F(b) = 0$). Notemos que:

$$F(a \cdot b) = F(a) \odot F(b) = F(a) \odot 0_B = 0_B$$

Es decir $(a \cdot b) \in F^{-1}(\{0\})$. Análogamente:

$$F(a \cdot b) = F(b) \odot F(a) = 0_B \odot F(a) = 0_B$$

Como a y b eran arbitrarios concluimos que:

$$(\forall\, a \in A)\,(\forall\, b \in F^{-1}(\{0_B\}))\; a \cdot b \in I \;\wedge\; b \cdot a \in F^{-1}(\{0_B\}).$$

Que es justamente la propiedad buscada.

Como $F^{-1}(\{0_B\})$ satisface las propiedades requeridas para ser un ideal, es uno.

b) 1) Si $1 \in I$ aplicando la propiedad (ii) tenemos que:

$$(\forall a \in A) \qquad 1 \cdot a \in I \wedge a \cdot 1 \in I$$

Concluimos entonces que si $a \in A$, entonces $a \in I$, es decir $A \subseteq I$. Además como $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$ tenemos que $I \subseteq A$. Concluimos que $I = A$.

2) Si $\exists x \in I$ invertible, como $x^{-1} \in A$, tenemos por la propiedad (ii) que $x \cdot x^{-1} \in I$. Es decir $1 \in I$, aplicando lo demostrado en 1) concluimos.

P7. [Divisores del Cero]
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

a) Si $a \in A$ es un divisor del cero y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es un divisor del cero.

b) Demuestre que si el producto de dos elementos de A es un divisor de cero, entonces al menos uno de ellos es un divisor de cero.

Solución 7.

a) Como $a \in A$ es divisor del 0, existe $c \in A$ tal que:

$$\underbrace{a}_{\neq 0}\underbrace{c}_{\neq 0} = 0$$

Notemos entonces que si $a \cdot b \neq 0$, entonces:

$$\underbrace{a \cdot b}_{\neq 0}\underbrace{c}_{\neq 0} = b\underbrace{ac}_{=0} = 0$$

De esto tenemos que $a \cdot b$ es un divisor del cero.

b) Si $a \cdot b$ es un divisor del cero, entonces no es cero (y por tanto $a, b \neq 0$) y además existe $c \neq 0$ tal que:

$$(a \cdot b) \cdot c = 0$$

Supongamos que a no es divisor de cero (pues si lo fuera estamos listos). Luego como a no es divisor de 0 y $a \neq 0$, tenemos que $ac \neq 0$ y por tanto:

$$\underbrace{b}_{=0} \cdot \underbrace{(ac)}_{=0} = 0$$

De donde b es divisor del cero. Esto concluye lo pedido.