MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 15 : Complejos y Polinomios

29 de julio del 2017

P1. [Casquete unitario]
Sea:

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

a) Demuestre que $(S, \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

b) Para $z \in S$ y $z \neq 1$ definimos:

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

Demuestre que w es un imaginario puro, es decir que $\mathbb{R}\text{e}(w) = 0$.

c) Sea $z \in S$ y $z \neq -1$. Demuestre que:

$$\frac{1+z}{1+\overline{z}} = z$$

d) Sea $z \in S$, y $z \neq -1$. Calcule:

$$\mathbb{I}\text{m}\left(\frac{z}{(1+z)^2}\right)$$

Solución 1.

a) Ocuparemos el teorema de caracterización de subgrupo. Notemos que $1 \in S$, pues $|1| = 1$, es decir $S \neq \emptyset$. Sean $x, y \in S$, observemos primero que $x, y \neq 0$, luego:

$$|xy^{-1}| = \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} = \frac{1}{1} = 1$$

Concluimos entonces que $xy^{-1} \in S$ y por ende $(S, \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

b) Recordemos que $\mathbb{R}\text{e}(w) = \frac{w+\overline{w}}{2}$. Calculemos $w + \overline{w}$:

$$\begin{aligned}
w + \overline{w} &= \frac{1+z}{1-z} + \overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} \\
&= \frac{1+z}{1-z} + \frac{\overline{1+z}}{\overline{1-z}} \\
&= \frac{(1+z)\overline{(1-z)} + (1-z)\overline{(1+z)}}{(1-z)\overline{(1-z)}} \\
&= \frac{(1+z)(1-\overline{z}) + (1-z)(1+\overline{z})}{(1-z)\overline{(1-z)}} \\
&= \frac{1-\overline{z}+z-z\overline{z}+1+\overline{z}-z-z\overline{z}}{(1-z)\overline{(1-z)}} \\
&= \frac{2-2z\overline{z}}{(1-z)\overline{(1-z)}} \\
&= \frac{2-2|z|^2}{(1-z)\overline{(1-z)}} \\
&= \frac{2-2}{(1-z)\overline{(1-z)}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

De esto concluimos que $\mathbb{R}\text{e}(w) = 0$ y que w es un imaginario puro.

c) Notemos que como $z \in S$, entonces $z \neq 0$, luego:

$$\frac{1+z}{1+\overline{z}} = \frac{z}{z}\left(\frac{1+z}{1+\overline{z}}\right) = \frac{z+z^2}{z+z\overline{z}} = \frac{z+z^2}{z+|z|^2} = \frac{z+z^2}{z+1} = \frac{z(z+1)}{z+1} = z$$

d) Supongamos $z = a + bi$, luego:

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(1+z)^2} &= \frac{z}{(1+z)^2}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} \\
&= \frac{z\overline{z}}{\overline{z} + 2z\overline{z} + z^2\overline{z}} \\
&= \frac{|z|^2}{\overline{z} + 2|z|^2 + z|z|^2} \\
&= \frac{1}{2 + z + \overline{z}} \\
&= \frac{1}{2 + a + bi + a - bi} \\
&= \frac{1}{2 + 2a}
\end{aligned}$$

Es decir $\frac{z}{(1+z)^2} \in \mathbb{R}$ y por tanto $\mathbb{I}\text{m}\left(\frac{z}{(1+z)^2}\right) = 0$.

P2. [Forma Cartesiana]

a) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(1+i)^n + (1-i)^n \in \mathbb{R}$$

b) Sean $M, N \in \mathbb{N}$ tal que existen $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ que verifican $M = a^2 + b^2$ y $N = c^2 + d^2$. Demuestre que existen $p, q \in \mathbb{N}$ tal que $MN = p^2 + q^2$. En otras palabras, piden probar que si dos enteros se pueden escribir como la suma de dos cuadrados, entonces su producto también.
Hint: Le puede ser útil trabajar la siguiente expresión $|(a+ib)(c+id)|^2$.

Solución 2.

1) Sea $z = (1+i)^n + (1-i)^n$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \overline{(1+i)^n + (1-i)^n} \\ &= \overline{(1+i)^n} + \overline{(1-i)^n} \\ &= \overline{(1+i)}^n + \overline{(1-i)}^n \\ &= (1-i)^n + (1+i)^n \\ &= z \end{aligned}$$

Luego como $z = \overline{z}$, tenemos que $z \in \mathbb{R}$.

2) Ocupando el hint:

$$\begin{aligned} MN &= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ &= |a+ib|^2|c+id|^2 \\ &= |(a+ib)(c+id)|^2 \\ &= |ac + aid + ibc - bd|^2 \\ &= |ac - bd + i(ad+bc)|^2 \\ &= \underbrace{(ac-bd)^2}_{p^2} + \underbrace{(ad+bc)^2}_{q^2} \end{aligned}$$

De donde concluimos el resultado.

P3. [Fórmula de Machin]
A partir del producto $(1+i)(5-i)^4$ pruebe que $\pi = 16 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4 \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$.

Solución 3. Notemos que en forma polar:

$$(1+i) = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi}{4} i\right) \qquad (5-i) = \sqrt{26} \exp\left(-\arctan\left(\frac{1}{5}\right) i\right)$$

De esto concluimos que:

$$(1+i)(5-i)^4 = \sqrt{2}(26)^2 \exp\left(\left(\frac{\pi}{4} - 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) i\right)$$

Mientras que si expandimos el producto de la manera tradicional tenemos:

$$\begin{aligned}
(1+i)(5-i)^4 &= (1+i)((5-i)^2)^2 \\
&= (1+i)(25-10i-1)^2 \\
&= (1+i)(24^2 - 480i - 10^2) \\
&= (1+i)(476 - 480i) \\
&= 476 - 480i + 476i + 480 \\
&= -4i + 956 \\
&= 4(-i + 239) \\
&= 4\sqrt{1+239^2} \exp\left(-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)\right)
\end{aligned}$$

Igualando los argumentos de los números en forma polar tenemos:

$$\frac{\pi}{4} - 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

De donde podemos concluir la identidad buscada.
Obs : Cabe notar que podemos igualar argumentos pues ambos se encuentran en el intervalo $(-\pi, \pi]$.

P4. [Raíces]

a) Demuestre que las soluciones de la ecuación $x^2+x+1=0$ son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1.

b) Encuentre los $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

$$z^4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

c) Calcule $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Hint: Utilice las raíces quintas de la unidad de manera adecuada.

Solución 4.

a) Notemos que si:

$$x^2+x+1=0 \implies x^3+x^2+x=0$$

Igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$x^2+x+1 = x^3+x^2+x \implies x^3=1$$

De donde concluimos que las soluciones son raíces cúbicas de la unidad. Supongamos que son 1, luego:

$$1^2+1+1=0 \implies 3=0$$

Lo que sería una contradicción.

b) Buscamos las raíces cuartas de $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. Pasandolo a forma polar tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} &= \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} \\
&= \frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4} \\
&= -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
&= e^{i\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}$$

Sabemos entonces que las soluciones son de la forma $\sqrt[n]{R}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ con $k\in\{0,1,2,3\}$. En nuestro caso quedan $\sqrt[4]{1}e^{i\frac{(2\pi/3)+2k\pi}{4}} = e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2})}$. Luego:

$$z_1 = e^{i\pi/6} \qquad z_2 = e^{i(\pi/6+\pi/2)} \qquad z_3 = e^{i(\pi/6+\pi)} \qquad z_4 = e^{i(\pi/6+3\pi/2)}$$

c) Recordando que la suma de las raíces quintas da 0, tenemos:

$$1+e^{2i\pi/5}+e^{4i\pi/5}+e^{6i\pi/5}+e^{8i\pi/5} = 0$$

Tomando parte real, concluimos que:

$$\begin{aligned}
1+\cos(2\pi/5)+\cos(4\pi/5)+\cos(6\pi/5)+\cos(8\pi/5) &= 0 \\
1+\cos(2\pi/5)+\cos(4\pi/5)+\cos(4\pi/5)+\cos(2\pi/5) &= 0 \\
1+2\cos(2\pi/5)+2\cos(4\pi/5) &= 0
\end{aligned}$$

Ocupando la identidad $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$ tenemos que:

$$4\cos(2\pi/5)^2 + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0$$

Resolviendo la cuadrática tenemos que:

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Recordando que $\cos(2\pi/5) \geq 0$, tenemos que $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0{,}3$.

P5. [Sumas con raíces de la unidad]
Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces n-ésimas de la unidad ordenadas de manera usual (es decir, según argumento de manera creciente).

a) Demuestre que:
$$w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_0 = 0$$

b) Pruebe que $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ se tiene que $\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$.

c) Sea $z \in \mathbb{C}$ fijo. Calcule $\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n$.

Solución 5. Recordemos primero que para todo k:
$$w_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

Tiene sentido entonces notar que $w_0 = w_n$, $w_1 = w_{n+1}$, $w_2 = w_{n+2}$, etc.... Veamos además que:
$$w_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} = (e^{i \frac{2\pi}{n}})^k = (w_1)^k$$

a) Calculemos:
$$\begin{aligned}
w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_0 &= w_0 w_1 + w_1 w_2 + \ldots + w_{n-2} w_{n-1} + w_{n-1} w_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} w_k w_{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (w_1)^k (w_1)^{k+1} \\
&= w_1 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (w_1^2)^k}_{\text{Geométrica}} \\
&= w_1 \frac{(w_1^2)^n - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{(w_1^n)^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= w_1 \frac{1^2 - 1}{w_1^2 - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

b) Similar a lo hecho en la parte *a*):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k &= \sum_{j=0}^{n-1} (w_1^j)^k \\
&= \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (w_1^k)^j}_{\text{Geométrica}} \\
&= \frac{(w_1^k)^n - 1}{w_1^k - 1} \\
&= \frac{(w_1^n)^k - 1}{w_1^k - 1} \\
&= \frac{1^k - 1}{w_1^k - 1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

c) La idea de esta parte es recordar que el Teorema del Binomio funciona para elementos de $\mathbb{C}$ (de hecho el Teorema del Binomio nos da algo más potente aún, una igualdad de polinomios):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} (z + w_j)^n &= \sum_{j=0}^{n-1} (z + w_1^j)^n \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} w_1^{jk} z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{k} w_1^{jk} z^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_1^{jk} \right) \\
&= \left(\binom{n}{0} z^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} z^{n-k} + \binom{n}{n} z^0 \right) \left(\sum_{j=0}^{n-1} w_1^{jk} \right) \\
&= z^n \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1} w_1^{j \cdot 0} \right)}_{\text{Suma de 1's}} + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} z^{n-k} \right) \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k \right)}_{=0 \text{ por } b)} + 1 \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n-1} (w_1^n)^j \right)}_{\text{Suma de 1's}} \\
&= z^n n + n \\
&= n(z^n + 1)
\end{aligned}$$

P6. [Más del casquete unitario]
Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ complejos unitarios (es decir $|z_1| = |z_2| = 1$) tales que:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= -u, \quad u \in \mathbb{C} \\ z_1 z_2 &= v, \quad\ \ v \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

a) Pruebe que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$.

b) Pruebe que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$.

c) Pruebe que $u = \overline{u}v$.

d) Si los ángulos de la forma polar de u y v, son φ y θ respectivamente. Utilice *c*) para demostrar que:

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Solución 6.

a) Tomando modulo a la primera igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| &= |-u| \\ |z_1 + z_2| &= |u| \end{aligned}$$

Ocupando la desigualdad triangular tenemos:

$$|u| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 2$$

Tomando modulo a la segunda igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |v| \\ |z_1||z_2| &= |v| \\ 1 &= |v| \end{aligned}$$

De donde concluimos.

b) Dividiendo las igualdades del enunciado (podemos pues $|z_1 z_2| \neq 0$ y por ende distinto de 0) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} &= -\frac{u}{v} \\ \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} &= -\frac{u}{v} \\ \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} &= -\frac{u}{v} \\ \overline{z_1} + \overline{z_2} &= -\frac{u}{v} \end{aligned}$$

c) Conjugando la primera igualdad del enunciado obtenemos $\overline{z_1 + z_2} = \overline{-u}$, combinando esto con *b*) obtenemos:

$$\begin{aligned} \underbrace{\overline{z_1 + z_2}}_{\overline{-u}} &= \underbrace{\overline{z_1} + \overline{z_2}}_{b)} \\ -\overline{u} &= -\frac{u}{v} \\ \overline{u}v &= u \end{aligned}$$

d) En forma polar tenemos que $u = |u|e^{i\varphi}$ y que $v = \underbrace{|v|}_{=1} e^{i\theta} = e^{i\theta}$. Ocupando *c)*:

$$\begin{aligned} \overline{u}v &= u \\ |u|e^{-i\varphi}e^{i\theta} &= |u|e^{i\varphi} \\ e^{i(\theta-\varphi)} &= e^{i\varphi} \end{aligned}$$

De donde concluimos que existe k tal que:

$$\theta - \varphi = \varphi + 2k\pi$$

Y por tanto:

$$\theta = 2\varphi + 2k\pi$$

Que era lo buscado.

P7. [Centroide]
El centroide G de un triangulo T es la intersección de sus medianas. Si el triangulo T tiene vertices $a, b, c \in \mathbb{C}$, un hecho conocido (no lo demuestre) es que:

$$G = \frac{1}{3}(a + b + c)$$

Suponga ahora que en los lados de T construimos tres triángulos similares de forma arbitraria. Esto logra construir un nuevo triangulo de vertices $p, q, r \in \mathbb{C}$ como indica la figura. Demuestre que el centroide de este nuevo triangulo coincide con el centroide del triangulo original.

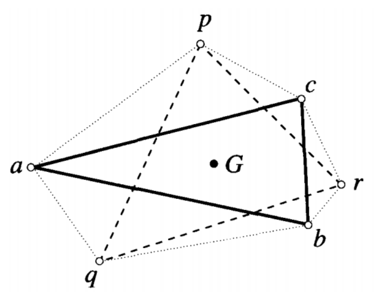

Figura 1: La situación descrita en la P4.

Solución 7. Supongamos que $\angle cap = \alpha$, al ser similares sabemos que $\angle qba = \angle bcr = \angle cap = \alpha$. Por un argumento de similaridad también sabemos que:

$$\frac{\overline{pa}}{\overline{ca}} = \frac{\overline{rc}}{\overline{bc}} = \frac{\overline{qb}}{\overline{ab}} = R$$

De esto concluimos que:

$$(p - a) = Re^{i\alpha}(c - a)$$

Pues recordando la interpretación geometrica de la forma polar, estamos diciendo que el vector $(p - a)$ es un estiramiento por R y una rotación por α del vector $(c - a)$. Si llamamos $\delta = Re^{i\alpha}$, tenemos (de manera análoga) que:

$$(r - c) = \delta(b - c) \qquad (q - b) = \delta(a - b)$$

Sumando todas las ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned}
(p - a) + (r - c) + (q - b) &= \delta(c - a) + \delta(b - c) + \delta(a - b) \\
(p - a) + (r - c) + (q - b) &= 0 \\
p + q + r &= a + b + c
\end{aligned}$$

Luego si G' es el centroide de $\triangle pqr$ tenemos que:

$$G' = \frac{1}{3}(p + q + r) = \frac{1}{3}(a + b + c) = G$$

De donde concluimos.

P8. [Raíces cúbicas de la unidad]

a) Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|w_1| = |w_2| = 1$ y $w_1 + w_2 = -1$.

(i) Pruebe que $w_1 = \overline{w_2}$.

(ii) Muestre que $w_0 = 1$, w_1 y w_2 son las raíces cúbicas de la unidad.

b) Sean $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_0| = |z_1| = |z_2| = 1$ y $z_0 + z_1 + z_2 = 0$. Demuestre que $\exists \theta \in \mathbb{R}$, tal que $z_k = w_k e^{i\theta}$, $k = 0, 1, 2$, donde w_k son los complejos de la parte anterior.

Solución 8.

a) (i) Supongamos $w_1 = a + bi$ y $w_2 = c + di$. Luego tenemos que

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= -1 \\ a + bi + c + di &= -1 \end{aligned}$$

Igualando parte real e imaginaria tenemos que:

$$a + c = -1 \qquad b = -d$$

De esto notamos que $b = -d$ y que tanto a como c son negativos, pues es claro que al menos uno es negativo y si alguno fuera positivo, digamos $a > 0$ y $c \leq 0$ sin perdida de generalidad, tendríamos que $c < -1$, es decir $|c| > 1$, como además $|c| = \sqrt{c^2} \leq \sqrt{c^2 + d^2} = |w_2| = 1$, lo que no es posible. Luego:

$$\begin{aligned} |w_1|^2 &= |w_2|^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2 + b^2 \end{aligned}$$

Es decir $a^2 = c^2$, como ambos tienen el mismo signo concluimos que $a = c$. Luego $w_1 = a + bi$ y $w_2 = a - bi$, es decir $w_1 = \overline{w_2}$.

(ii) Multiplicando la ecuación por w_1^2 tenemos:

$$\begin{aligned} w_1^3 + w_2 w_1^2 &= -w_1^2 \\ w_1^3 + \overline{w_1} w_1^2 + w_1^2 &= 0 \\ w_1^3 + w_1^2 + w_1 &= 0 \end{aligned}$$

Y como $w_1 \neq 0$, tenemos que $1 + w_1 + w_1^2 = 0$. Ocupando la **P4 a)** concluimos que w_1 es raíz cúbica de la unidad distinta de 1. El razonamiento para w_2 es análogo. Notemos además que $w_1 \neq w_2$ pues si fueran iguales $w_1 = \overline{w_1}$ y por tanto $w_1 \in \mathbb{R}$ y la única raíz cúbica de la unidad es 1, lo que no es posible.

b) Como $|z_0| = 1$, tenemos que $z_0 = e^{i\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego:

$$|z_0 e^{-i\alpha}| = |z_1 e^{-i\alpha}| = |z_2 w^{-i\alpha}| = 1$$

Y además:

$$z_1 e^{-i\alpha} + z_2 e^{-i\alpha} = (z_1 + z_2) e^{-i\alpha} = (-z_0) e^{-i\alpha} = -e^{i\alpha} e^{-i\alpha} = -1$$

Es decir $z_1 e^{-i\alpha}$ y $z_2 w^{-i\alpha}$ satisfacen las condiciones de la parte *a)* y por ende son raíces distintas de la unidad distintas de 1. Concluimos que:

$$z_0 = w_0 e^{-i\alpha} \quad z_1 = w_1 e^{-i\alpha} \quad z_2 = w_2 e^{-i\alpha}$$

Tomando $\theta = -\alpha$ se concluye.

P9. [Raíces de la unidad]
Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ la raíces n-ésimas de la unidad ordenadas segun argumento creciente.

a) Demuestre la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{w_j^k} w_l^k = \begin{cases} n & \text{si } j = l \\ 0 & \text{si } j \neq l \end{cases}$$

b) Sea w una raíz cúbica de la unidad con $w \neq 1$, demuestre que:

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

Solución 9.

a) Tenemos que demostrar dos igualdades, una cuando $j = l$ y otra cuando $j \neq l$.

- ($j = l$) En este caso la suma queda:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{w_j^k} w_j^k = \sum_{k=1}^{n} |w_j^k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |w_j|^{2k} = \sum_{k=1}^{n} 1^{2k} = n$$

  Donde $|w_j| = 1$ pues es una raíz de la unidad.
- ($j \neq l$) En este caso la suma queda:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \overline{w_j^k} w_j^k &= \sum_{k=1}^{n} \overline{e^{i\frac{2\pi j}{n}}} e^{i\frac{2\pi l}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{-i\frac{2\pi jk}{n}} e^{i\frac{2\pi lk}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{-i\frac{2\pi jk}{n}} e^{i\frac{2\pi lk}{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{\left(i\frac{2\pi(l-j)}{n}\right)^k} \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} w_{l-j}^k}_{\text{Geométrica}} \\ &= \frac{w_{l-j}^{n+1} - w_{l-j}}{w_{l-j} - w_{l-j}} = \frac{w_{l-j}^{1} - w_{l-j}}{w_{l-j} - w_{l-j}} = 0 \end{aligned}$$

b) Notemos que para las raices cúbicas de la unidad

$$1 + w_1 + w_2 = 0$$

Notemos que como en el caso de las raíces cúbicas $w_2 = w_1^2$ y $w_1 = w_2^2$ concluimos la siguiente relación para w, donde w es una raíz cúbicaz de la unidad distintas de 1:

$$1 + w + w^2 = 0$$

Esto nos dice que $1+w=-w^2$ y que $1+w^2=-w$, aplicando esto al lado izquierdo de la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}
(\underbrace{1+w}_{-w^2})^3+(\underbrace{1+w^2}_{-w})^9+(1+\underbrace{w^3}_{1})^6 &= (-w^2)^3+(-w)^9+(2)^6 \\
&= -(\underbrace{w^3}_{1})^2-(\underbrace{w^3}_{1})^3+64 \\
&= -1-1+64 \\
&= 62
\end{aligned}$$

P10. [División y cancelabilidad de Polinomios]

a) Considere $p, d \in \mathbb{R}[x]$

$$\begin{aligned} p(x) &= 4x^4 - 2x^3 - 3 \\ d(x) &= 2x^2 - 3 \end{aligned}$$

Encuentre $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(x) = q(x)d(x) + r(x)$ con $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(d)$.

b) Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $(x-1)|(x^n - 1)$.

c) Sea $p(x) = x^5 + ax^2 + b$ y $q(x) = x^3 + cx + 1$. Determine los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para que $q|p$.

d) Sean $p, q, r \in \mathbb{R}[x]$ tal que $p(q - r) = q(p - r)$ y $\mathrm{gr}(r) \geq 0$. Demuestre que $p = q$.

Solución 10.

a) Notemos que nos estan pidiendo justamente encontrar el cuociente y el resto al dividir los polinomios p y d, utilizando el algoritmo de la división:

$$\begin{array}{l} \big(\ 4x^4 - 2x^3 \qquad\qquad -3\big) : \big(2x^2 - 3\big) = 2x^2 - x + 3 + \dfrac{-3x+6}{2x^2-3} \\ \underline{-4x^4 \qquad +6x^2} \\ \qquad -2x^3 + 6x^2 \\ \qquad \underline{2x^3 \qquad -3x} \\ \qquad\qquad 6x^2 - 3x - 3 \\ \qquad\qquad \underline{-6x^2 \qquad +9} \\ \qquad\qquad\qquad -3x + 6 \end{array}$$

De donde vemos que el cuociente es $q(x) = 2x^2 - x + 3$ y que el resto es $r(x) = -3x + 6$.

b) Dos formas para hacerlo:

- **(Forma 1)** Dividamos un par de estos polinomios:

$$\begin{array}{l} \big(\ x^2 \qquad -1\big) : \big(x - 1\big) = x + 1 \\ \underline{-x^2 + x} \\ \qquad x - 1 \\ \qquad \underline{-x + 1} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \big(\ x^3 \qquad\qquad -1\big) : \big(x - 1\big) = x^2 + x + 1 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ \qquad x^2 \\ \qquad \underline{-x^2 + x} \\ \qquad\qquad x - 1 \\ \qquad\qquad \underline{-x + 1} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

Notemos que esto nos da para pensar de que $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$. Demostremos esto, en efecto:

$$\begin{aligned} (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) &= (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) - (1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) \\ &= x^n - 1 \end{aligned}$$

Luego como $x^n - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$, tenemos que $x - 1$ divide a $x^n - 1$.

- **(Forma 2)** Por inducción. El caso base se tiene pues $(x-1)|(x^1-1)$, tenemos como hipótesis inductiva que $(x-1)|(x^n-1)$, es decir que $(x^n-1)=(x-1)p(x)$ para algún polinomio p. Para el caso $n+1$ tenemos que:

$$x^{n+1}-1 = x^{n+1}-x^n+\underbrace{x^n-1}_{\text{H.I.}} = x^n(x-1)+p(x)(x-1) = (x-1)(x^n+p(x))$$

  De donde se ve que $(x-1)$ divide a $x^{n+1}-1$.

c) Dividiendo ambos polinomios tenemos:

$$\begin{array}{llll}
\big(\quad x^5 & \qquad\qquad + ax^2 & & + b\big) : \big(x^3+cx+1\big) = x^2 - c + \dfrac{(-1+1a)\,x^2+c^2x+(1c+1b)}{x^3+cx+1} \\
\underline{-x^5-cx^3} & \underline{\qquad\qquad - x^2} & & \\
\quad -cx^3 & +(-1+1a)\,x^2 & & +b \\
\quad \underline{cx^3} & & \underline{+c^2x} & \underline{+c} \\
 & (-1+1a)\,x^2 & +c^2x & +(1c+1b)
\end{array}$$

Como el resto debe ser 0, tenemos que tener $a=-1$, $b=0$ y $c=0$.

d) Notemos que como $\text{gr}(r)\geq 0$, entonces r no es el polinomio 0. Luego:

$$\begin{aligned}
p(q-r) &= q(p-r) \\
pq-pr &= qp-qr \\
pq-pr &= pq-qr \\
pr &= qr \\
p &= q
\end{aligned}$$

Donde se ocupó el hecho de que los polinomios son un anillo conmutativo sin divisores del cero (es decir, todo elemento no nulo es cancelable).

P11. [Coeficientes]

a) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{17} en el polinomio $(1+x^5+x^7)^{20}$.

b) Encuentre el coeficiente que acompaña a x^{12} en el polinomio $(1+x^2+x^5+x^7)^{25}$.

c) Pruebe que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Para esto compare los coeficientes de los polinomios $(1+x)^{2n}$ y $(1+x)^n(1+x)^n$ de manera adecuada.

Solución 11.

a) Lo resolveremos de dos formas, una primera usando iterativamente el teorema del Binomio y una segunda usando argumentos combinatoriales. Usando el teorema del binomio tenemos:

$$\begin{aligned}(1+\underbrace{x^5+x^7}_{p})^{20} &= \underbrace{(1+p)^{20}}_{\text{Teo. Binomio}}\\ &= \sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}1^{20-i}p^i\\ &= \sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}\underbrace{(x^5+x^7)^i}_{\text{Teo. Binomio}}\\ &= \sum_{i=0}^{20}\binom{20}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}x^{5(i-j)}x^{7j}\\ &= \sum_{i=0}^{20}\sum_{j=0}^{i}\binom{20}{i}\binom{i}{j}x^{5(i-j)}x^{7j}\end{aligned}$$

Notemos que la única forma de formar 17 con los exponentes que tenemos es como $2\cdot 5+1\cdot 7=17$, es decir necesitamos que:

$$j=1,\quad i-j=2 \implies j=1, i=3$$

Luego tenemos que el coeficiente que acompaña a x^{17} es:

$$\binom{20}{3}\binom{3}{1}=\frac{20!}{3!17!}\frac{3!}{1!2!}=\frac{20!}{17!2!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18}{10}=10\cdot 19\cdot 18=3420$$

Otra forma de hacerlo es mediante el siguiente argumento combinatorial. Notemos que nosotros tenemos el siguiente producto:

$$(1+x^5+x^7)(1+x^5+x^7)\underbrace{\ldots}_{\text{20 veces}}(1+x^5+x^7)$$

Notemos que cada vez que obtenemos un término de este producto lo que hacemos es elegir 1 elemento de cada paréntesis y multiplicarlos juntos. Nuevamente para obtener 17 tenemos que elegir dos x^5 y un x^7. ¿De cuantas maneras se puede hacer esto? Notemos que los x^5 los podemos elegir de $\binom{20}{2}$ maneras (pues esto es elegir 2 elementos entre 20) y al hacer esto hay dos parentesis que no se pueden ocupar, luego elegir el x^7 se puede hacer de 18 formas, por tanto el total de formas de formar x^{17} (y por tanto el coeficiente que acompaña al x^{17}) es:

$$\binom{20}{2}18=\frac{20!}{2!20!}18=\frac{20\cdot 19}{2}\cdot 18=10\cdot 19\cdot 18=3420$$

b) No lo haremos mediante el teorema del binomio (pues hay que hacer 3 teoremas del Binomio). Nuevamente tenemos un producto del estilo:

$$(1+x^2+x^5+x^7)(1+x^2+x^5+x^7)\underbrace{\ldots}_{25\text{ veces}}(1+x^2+x^5+x^7)$$

¿De cuantas maneras podemos formar 12? De las siguientes formas:

$$12 = 6\cdot 2, \quad 12 = 2\cdot 5 + 1\cdot 2, \quad 12 = 1\cdot 5 + 1\cdot 7$$

Notemos que para la primera forma tenemos que elegir 6 dos entre los 25 paréntesis, esto se puede hacer de $\binom{25}{6}$ maneras.

Para la segunda forma tenemos que elegir 2 cincos y un dos entre los 25 paréntesis, esto se puede hacer de $\binom{25}{2}23$ maneras.

Para la última forma hay que elegir un cinco y un siete, esto se puede hacer de $25\cdot 24$ maneras.

Por último cada una de estas opciones aporta a formar coeficientes para x^{12}, por lo tanto el coeficiente que acompaña a x^{12} es:

$$\binom{25}{6} + \binom{25}{2}23 + 25\cdot 24 = \frac{25!}{6!19!} + \left(\frac{25!}{2!23!}\right) + 25\cdot 24 = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \frac{25\cdot 24}{3\cdot 2} + 25\cdot 24$$

Simplificando tenemos:

$$5\cdot 23\cdot 22\cdot 7\cdot 10 + 25\cdot 4 + 25\cdot 24 = 177100 + 100 + 600 = 177800$$

c) Sea $p(x) = (1+x)^{2n}$, expandamoslo de las manera que nos indican:

$$p(x) = \underbrace{(1+x)^{2n}}_{\text{Teo. Binomio}} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$$

Notemos que el coeficiente que acompaña a x^n es $\binom{2n}{n}$. Por otro lado:

$$p(x) = \underbrace{(1+x)^n}_{\text{Teo. Binomio}}\underbrace{(1+x)^n}_{\text{Teo. Binomio}} = \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)}_{\text{Producto de Polinomios}} = \sum_{k=0}^{2n}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}x^k$$

Notemos que el coeficiente que acompaña a x^n es:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underbrace{\binom{n}{n-i}}_{=\binom{n}{i}} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

Como los polinomios son iguales, los coeficientes que acompañan a x^n deben ser iguales, es decir:

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$$

Que era lo pedido.

P12. [Composición]

a) Sean $p, q \in \mathbb{C}[x]$ tales que $\text{gr}(p) = n$ y $\text{gr}(q) = m$. Demuestre que $p \circ q$ es un polinomio y calcule $\text{gr}(p \circ q)$.

b) Encuentre todos los $p \in \mathbb{C}[x]$ tales que:

$$p(x^2) = (x^2+1)p(x) \qquad p(p(x)) = p(x)$$

Hint: Puede ser útil encontrar $\text{gr}(p)$ *antes que* p.

Solución 12.

a) Notemos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \\ q(x) &= \sum_{l=0}^{m} b_l x^l \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} p \circ q(x) &= p(q(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (q(x))^k \end{aligned}$$

Notemos que $(q(x))^k$ es un polinomio para todo k (pues es la multiplicación de k polinomios), luego $a_k(q(x))^k$ es un polinomio (pues es la multiplicación de a_k y $(q(x))^k$) ambos polinomios, por último $p \circ q(x)$ es la suma de todos los polinomios $a_k(q(x))^k$ y por tanto es un polinomio. Para calcular el grado notemos que si $a_k \neq 0$:

$$\text{gr}(a_k(q(x))^k) = \text{gr}(a_k \underbrace{q(x) \dots q(x)}_{k \text{ veces}}) = 0 + \underbrace{m + m + \dots + m}_{k \text{ veces}} = km$$

Y por tanto:

$$p \circ q(x) = a_0 + a_1 q(x) + a_2 (q(x))^2 + \dots + a_{n-1}(q(x)^{n-1}) + \underbrace{a_n q(x)^n}_{a_n \neq 0, \text{ el grado es } mn}$$

Es decir el último sumando tiene un coeficiente no nulo que acompaña a x^{mn}, llamemoslo b, como los demás polinomios de los otros sumandos tienen grado a lo más $x^{(n-1)m}$ nada puede cancelar al elemento bx^{mn} y por tanto $\text{gr}(p \circ q) = mn$.

Obs : Si uno quisiera ser muy formal habría que separarse en el caso cuando $m = -\infty$ *y cuando* $n = -\infty$

b) Trabajemos nuestra primera ecuación:

$$\begin{aligned} p(x^2) &= (x^2+1)p(x) \\ \text{gr}(p(x^2)) &= \text{gr}((x^2+1)p(x)) \\ \text{gr}(p)\,\text{gr}(x^2) &= \text{gr}(x^2+1) + \text{gr}(p) \\ 2\,\text{gr}(p) &= 2 + \text{gr}(p) \end{aligned}$$

Es decir $\text{gr}(p) = -\infty$ o $\text{gr}(p) = 2$. Pongámonos en casos

- **Caso 1:** $(\text{gr}(p) = -\infty)$
  Si el $\text{gr}(p)$ es $-\infty$, entonces $p(x) = 0$. Como:

  $$p(x^2) = 0 = (x^2+1) \cdot 0 = (x^2+1)p(x)$$

  Satisface la ecuación, entonces es solución.

- **Caso 2:** ($\text{gr}(p) = 2$)
  En este caso tenemos que $p(x) = ax^2 + bx + c$, luego:

$$\begin{aligned} p(x^2) &= (x^2+1)p(x) \\ ax^4 + bx^2 + c &= (x^2+1)(ax^2+bx+c) \\ ax^4 + bx^2 + c &= ax^4 + bx^3 + (a+c)x^2 + bx + c \end{aligned}$$

  Para que ocurra esto debemos tener que $b = 0$ y $c = -a$. Luego $p(x) = ax^2 - a$ con $a \neq 0$ es solución.

El total de soluciones entonces son los polinomios de la forma:

$$p(x) = ax^2 - a$$

Con $a \in \mathbb{C}$.
Para resolver la segunda ecuación partimos con la misma idea de calcular el grado:

$$\begin{aligned} p \circ p &= p \\ \text{gr}(p \circ p) &= \text{gr}(p) \\ \text{gr}(p)^2 &= \text{gr}(p) \end{aligned}$$

Es decir $\text{gr}(p) = -\infty$, $\text{gr}(p) = 0$ o $\text{gr}(p) = 1$. Poniéndonos en casos tenemos que:

- **Caso 1:** ($\text{gr}(p) = -\infty$ o $\text{gr}(p) = 0$)
  En este caso $p(x) = c$ donde $c \in \mathbb{C}$. Luego:

$$p(p(x)) = p(c) = c = p(x)$$

  De donde concluimos que es solución.
- **Caso 2:** ($\text{gr}(p) = 1$)
  En este caso $p(x) = ax + b$. Luego:

$$\begin{aligned} p(ax+b) &= ax+b \\ a(ax+b)+b &= ax+b \\ a^2x + ab + b &= ax+b \end{aligned}$$

  Como $\text{gr}(p) = 1$ sabemos que $a \neq 0$, por ende $a = 1$ y $b = 0$. Luego en este caso $p(x) = x$.

Por tanto las soluciones a esta ecuación son $p(x) = x$ o $p(x) = c$ para todo $c \in \mathbb{C}$.

P13. [La igualdad es por coordenadas]

a) Sean $p, q \in \mathbb{R}[x]$ tales que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (2+f)+(e+f)x+(a-d)x^4+(2a+c)x^5+(a+b)x^7 \\ q(x) &= 3+(f+2)x+(a+b+c+d)x^3+(b+c+1)x^4+bx^5 \end{aligned}$$

Determine los valores de $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que $p = q$. Escriba el polinomio resultante.

b) Sea $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

Se define $q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por

$$q(x) = p(ix)$$

(i) Demuestre que $q(x)$ es un polinomio y de explícitamente sus coeficientes en función de los coeficientes de p.

(ii) Demuestre que:

$$p = q \iff \text{ para cada } k \text{ que no es múltiplo de 4, } a_k = 0.$$

Solución 13.

a) Recordando que dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, vemos que:

$$\begin{aligned} 2+f &= 3 \\ e+f &= f+2 \\ 0 &= a+b+c+d \\ a-d &= b+c+1 \\ 2a+c &= b \\ a+b &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos 6 incógnitas y 6 ecuaciones, resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2} \quad c = \frac{3}{2} \quad d = -\frac{3}{2} \quad e = 2 \quad f = 1$$

Por tanto el polinomio resultante es:

$$p(x) = q(x) = 3 + 3x - x^4 - \frac{1}{2}x^5$$

b) (i) Notemos que:

$$\begin{aligned} q(x) &= p(ix) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(a_k i^k)}_{=b_k} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \end{aligned}$$

De donde vemos que q es un polinomio con coeficientes $b_k = a_k i^k$.

(ii) Tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} & p = q \\ \iff \quad & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = b_k) \\ \iff \quad & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = a_k i^k) \\ \iff \quad & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = 0 \ \vee \ i^k = 1) \\ \iff \quad & \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, (a_k = 0 \ \vee \ k \text{ es múltiplo de } 4) \end{aligned}$$

De donde concluimos el resultado.

P14. [Varios]

a) Sea p un polinomio con coeficientes reales tal que $p \not\equiv 0$ tal que $i, 1, 2, 3$ son raíces de p. De el grado mínimo del polinomio y suponiendo que p es del grado mínimo y mónico encuentrelo.

b) Factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $p(x) = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15$

c) Sea $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, definamos:

$$p(x) = x^{3n_0} + x^{3n_1+1} + x^{3n_2+2}$$

Demuestre que $p(x)$ es divisible por $q(x) = x^2 + x + 1$.

Solución 14.

a) Notemos que como i es raíz entonces $\bar{i} = -i$ también lo es. Por ende el polinomio tiene por lo menos 5 raices $(i, -i, 1, 2, 3)$ y por tanto el grado de p debe ser mayor a 5. Como el polinomio debe tener lo anterior como raíces, tenemos que:

$$p(x) = (x - i)(x + i)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 12x^2 + 11x - 6$$

Satisface lo pedido.

b) Por el teorema de la raíz racional sabemos que si $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es una raíz entonces $a| - 15$ y $b|1$, luego las posibles raíces racionales son:

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$$

Veamos si encontramos alguna:

$$\begin{aligned} p(1) &= (1)^4 + 3(1)^3 - 12(1)^2 - 13(1) - 15 = -36 \\ p(-1) &= (-1)^4 + 3(-1)^3 - 12(-1)^2 - 13(-1) - 15 = -16 \\ p(3) &= (3)^4 + 3(3)^3 - 12(3)^2 - 13(3) - 15 = 0 \end{aligned}$$

Es decir 3 es raíz, luego $(x - 3)|p(x)$. Dividiendo polinomios:

$$\begin{array}{l} \big(\;\; x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15\big) : \big(x - 3\big) = x^3 + 6x^2 + 6x + 5 \\ \underline{-x^4 + 3x^3} \\ \qquad 6x^3 - 12x^2 \\ \qquad \underline{-6x^3 + 18x^2} \\ \qquad\qquad 6x^2 - 13x \\ \qquad\qquad \underline{-6x^2 + 18x} \\ \qquad\qquad\qquad 5x - 15 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-5x + 15} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

Nuevamente por el teorema de la raíz racional las raíces racionales del polinomio resultante x^3+6x^2+6x+5, pueden ser:

$$\{\pm 1, \pm 5\}$$

Además sabemos que ± 1 no pueden ser raíces pues ya las probamos y no eran raices de p, probemos las que faltan:

$$\begin{aligned} q(5) &= (5)^3 + 6(5)^2 + 6(5) + 5 = 310 \\ q(-5) &= (-5)^3 + 6(-5)^2 + 6(-5) + 5 = 0 \end{aligned}$$

Es decir -5 es raíz, dividiendo polinomios:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3+6x^2+6x+5\big):\big(x+5\big)=x^2+x+1\\
\underline{-x^3-5x^2}\\
\qquad\quad x^2+6x\\
\qquad \underline{-x^2-5x}\\
\qquad\qquad\quad x+5\\
\qquad\qquad \underline{-x-5}\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Para factorizar el polinomio resultante x^2+x+1, ocuparemos la formula cuadrática, de donde obtenemos que:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Estamos listos para entregar la factorización de nuestro polinomio original. En $\mathbb{R}$:

$$p(x)=(x-3)(x+5)(x^2+x+1)$$

y en $\mathbb{C}$:

$$p(x)=(x-3)(x+5)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

c) Demostraremos primero que las raíces de x^2+x+1 son raíces cúbicas de la unidad distintas de 1. En efecto:

$$x^2+x+1=0 \implies x^3+x^2+x=0$$

Igualando estas dos ecuaciones tenemos:

$$x^2+x+1=x^3+x^2+x \implies x^3=1$$

De donde concluimos que las soluciones son raíces cúbicas de la unidad. Supongamos que son 1, luego:

$$1^2+1+1=0 \implies 3=0$$

Lo que sería una contradicción. Sea entonces x_1 una raíz de x^2+x+1, luego:

$$
\begin{aligned}
p(x_1) &= x_1^{3n_0}+x_1^{3n_1+1}+x_1^{3n_2+2}\\
&= (x_1^3)^{n_0}+(x_1^3)^{n_1}x_1+(x_1^3)^{n_2}x_1^2\\
&= 1+x_1+x_1^2\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Es decir x_1 es raíz de $p(x)$, de manera análoga podemos concluir que la otra raíz de x^2+x+1, llamemosla x_2 es tambíen raíz de x_2. Por último como x_1,x_2 son raíces de $p(x)$, tenemos que $(x-x_1)(x-x_2)|p(x)$ o dicho de otra manera $(x^2+x+1)|p(x)$, que era lo pedido.

P15. [Funciones de polinomios]

Sea $F : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, definida para todo polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ de la forma $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ como $F(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Es decir, F es la función que a todo polinomio le asocia la suma de sus coeficientes.

a) Estudie inyectividad y sobreyectividad de F.

b) Sea $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $F(p) = 0$. Encuentre $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 0$.

Solución 15.

a)
- **Inyectividad:**
  Notemos que $x \neq 1$, pero $F(x) = 1$ y $F(1) = 1$. Es decir F no es inyectiva.
- **Sobreyectividad:**
  Sea $y \in \mathbb{R}$ definamos el siguiente polinomio $p_y(x) = y$, luego:

$$F(p_y) = y$$

Es decir F es sobreyectiva.

b) Notemos que si $F(p) = 0$ para $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$. Luego:

$$p(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k 1^k = \sum_{k=0}^{n} a_k = F(p) = 0$$

Es decir 1 es el x buscado.

P16. [Encontrar un polinomio]
Sea $p(x) \in \mathbb{R}(x)$ un polinomio mónico con $\text{gr}(p) = 3$. Se sabe que $p(x)$ es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales. Determine $p(x)$, justificando sus pasos, y encuentre todas sus raíces.

Solución 16. Notemos que como $(x-1)|p(x)$:

$$p(x) = (x-1)q(x)$$

Donde como p es mónico $q(x) = x^2 + bx + c$. Luego:

$$p(x) = (x-1)(x^2 + bx + c)$$

Utilizando el teorema del resto, tenemos que $p(2) = p(3) = p(4)$. O de manera equivalente:

$$\begin{array}{rcl} p(2) & = & p(3) \\ p(3) & = & p(4) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4 + 2b + c & = & 2(9 + 3b + c) \\ 2(9 + 3b + c) & = & 3(16 + 4b + c) \end{array} \implies \begin{array}{rcl} 4b + c & = & -14 \\ 6b + c & = & -30 \end{array}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que $b = -8$ y $c = 18$. Por tanto:

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 18) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$$

Nos falta encontrar las raíces. Es claro que $x_1 = 1$ es una raíz, para encontrar las otras usaremos la fórmula para la cuadrática sobre $x^2 - 8x + 18$, de donde tenemos que:

$$x_{2,3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 18}}{2} \implies x_2 = 4 + i\sqrt{2}, \quad x_3 = 4 - i\sqrt{2}$$

P17. [Factorización y Morfismos]

a) Sea $p(x) = x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9$. Se sabe que una de las raíces de $p(x)$ es $x = i$. Calcule todas las raíces de p y factorícelo en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por:

$$\varphi(p(x)) = p(a)$$

(i) Demuestre que φ es un morfismo epiyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

(ii) Pruebe que $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{(x-a)q(x) : q(x) \in \mathbb{R}[x]\}$.

Solución 17.

a) Como i es raíz, sabemos que $\bar{i} = -i$ tambíen lo es, luego $(x-i)(x+i) = (x^2+1)$ divide a $p(x)$. Dividiendo polinomios tenemos que:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^5 - 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 13x - 9\big) : \big(x^2+1\big) = x^3 - 5x^2 + 13x - 9 \\
\underline{-x^5 \qquad\quad -x^3} \\
\qquad -5x^4 + 13x^3 - 14x^2 \\
\qquad \underline{\;\;5x^4 \qquad\quad + 5x^2} \\
\qquad\qquad 13x^3 \;\; - 9x^2 + 13x \\
\qquad\qquad \underline{-13x^3 \qquad\quad - 13x} \\
\qquad\qquad\qquad -9x^2 \qquad - 9 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\;\;9x^2 \qquad + 9} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Ocupando el teorema de la raíz racional sobre el polinomio resultante ($q(x) = x^3 - 5x^2 + 13x - 9$) sabemos que si $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ es raíz $a|9$ y $b|1$, por ende las posibles raíces racionales son:

$$\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$$

Veamos si hay alguna:

$$q(1) \quad = \quad (1)^3 - 5(1)^2 + 13(1) - 9 = 0$$

Es decir 1 es raíz de q. Ocupando el algoritmo de Horner para dividir $q(x)$ por $x-1$, tenemos:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 - 5x^2 + 13x - 9\big) : \big(x-1\big) = x^2 - 4x + 9 \\
\underline{-x^3 \;\; + x^2} \\
\qquad -4x^2 + 13x \\
\qquad \underline{\;\;4x^2 \;\; - 4x} \\
\qquad\qquad 9x - 9 \\
\qquad\qquad \underline{-9x + 9} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Por último solo queda factorizar $x^2 - 4x + 9$. Ocupando la fórmula cuadrática tenemos:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-36}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}i}{2} = 2 \pm \sqrt{5}i$$

Hemos encontrado todas las raíces:

$$x_1 = 2 + \sqrt{5}i \qquad x_2 = 2 - \sqrt{5}i \qquad x_3 = 1 \qquad x_4 = i \qquad x_5 = -i$$

Su factorización en $\mathbb{R}$ es:

$$p(x) = (x^2 - 4x + 9)(x-1)(x^2+1)$$

Y la factorización en $\mathbb{C}$ es:

$$p(x) = (x - 2 - \sqrt{5}i)(x - 2 + \sqrt{5}i)(x-1)(x+i)(x-i)$$

(i) Verifiquemos primero que es morfismo para ambas operaciones:

$$\begin{aligned}\varphi((p+q)(x)) &= (p+q)(a) \\ &= p(a)+q(a) \\ &= \varphi(p(x))+\varphi(q(x))\end{aligned}$$

Y además:

$$\begin{aligned}\varphi((pq)(x)) &= (pq)(a) \\ &= p(a)q(a) \\ &= \varphi(p(x))\varphi(q(x))\end{aligned}$$

Veamos que es sobreyectiva. Sea $b \in \mathbb{R}$, queremos encontrar $p \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\varphi(p(x)) = b$. Definamos $p_y(x) = y$, luego:

$$\varphi(p_y(x)) = p_y(a) = y$$

De donde concluimos el resultado.

(ii) Tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned} & p(x) \in \varphi^{-1}(\{0\}) \\ \iff & \varphi(p(x)) = p(a) = 0 \\ \iff & a \text{ es una raíz de } p(x) \\ \iff & (x-a)|p(x) \\ \iff & \text{Existe } q \in \mathbb{R}[x] \text{ tal que } p(x) = q(x)(x-a)\end{aligned}$$

De donde concluimos.

P18. [Correspondencia en Polinomios]

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$.

a) Demuestre que $p(x)$ es sobreyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) \geq 1$.
Hint : Puede ser útil el teorema fundamental del álgebra.

b) El objetivo de esta parte es probar que $p(x)$ es inyectivo, si y sólo si $\text{gr}(p) = 1$.

(i) Demuestre que si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x)$ es inyectivo.

(ii) Demuestre que si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x)$ no es inyectivo.

(iii) Sea $n > 1$, $\lambda, a \in \mathbb{C}$. Definamos $q \in \mathbb{C}[x]$ como:

$$q(x) = \lambda(x - a)^n$$

Demuestre que $q(x)$ no es inyectivo.

(iv) Concluya la dirección que falta.

Solución 18.

a)
- ($\Longrightarrow$)
Probaremos la contrarreciproca, es decir:

$$\text{gr}(p) < 1 \implies p(x) \text{ no es sobreyectiva}$$

Si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x) = c$ para algún $c \in \mathbb{C}$. Tomemos entonces $a \neq c$, luego $\forall x \in \mathbb{C}$

$$p(x) = c \neq a$$

De donde vemos que p no es sobreyectivo.

- ($\Longleftarrow$)
Sea $b \in \mathbb{C}$, queremos encontrar $a \in \mathbb{C}$ tal que $p(a) = b$. Definamos entonces el siguiente polinomio:

$$f(x) = p(x) - b$$

Como $\text{gr}(p) \geq 1$, entonces $\text{gr}(f) \geq 1$. Por el teorema fundamental del álgebra existe x_0 tal que $f(x_0) = 0$. Luego:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 0 \\ p(x_0) - b &= 0 \\ p(x_0) &= b \end{aligned}$$

Tomando $a = x_0$ concluimos.

b) (i) Si $\text{gr}(p) = 1$, entonces $p(x) = ax + b$ con $a \neq 0$. Sean $x, y \in \mathbb{C}$, tales que $p(x) = p(y)$, luego:

$$\begin{aligned} p(x) &= p(y) \\ ax + b &= ay + b \\ ax &= ay \\ x &= y \end{aligned}$$

Por tanto $p(x)$ es inyectiva.

(ii) Si $\text{gr}(p) < 1$, entonces $p(x) = a$. Luego $0 \neq 1$, pero $p(0) = p(1)$, es decir $p(x)$ no es inyectiva.

(iii) Como $n > 1$, sea w_0 y w_1 dos raíces n-ésimas de la unidad tal que $w_0 \neq w_1$. Definamos $u_0 = w_0 + a$ y $u_1 = w_1 + a$, es claro que $u_0 \neq u_1$, pero:

$$\begin{aligned} q(u_0) &= \lambda(u_0 - a)^n = \lambda(w_0 + a - a)^n = \lambda(w_0)^n = \lambda \\ q(u_1) &= \lambda(u_1 - a)^n = \lambda(w_1 + a - a)^n = \lambda(w_1)^n = \lambda \end{aligned}$$

Es decir $q(u_0) = q(u_1)$ y por tanto $q(x)$ no es inyectiva.

(iv) Recapitulando. En la parte (i) probamos que:

$$\mathrm{gr}(p) = 1 \implies p(x) \text{ es inyectivo}$$

Nos falta probar la reciproca. Por contrarreciproca probaremos que:

$$\mathrm{gr}(p) \neq 1 \implies p(x) \text{ no es inyectivo}$$

Como el $\mathrm{gr}(p) \neq 1$, tenemos que $\mathrm{gr}(p) < 1$ o $\mathrm{gr}(p) > 1$. Si $\mathrm{gr}(p) < 1$, de donde concluiríamos por la parte (ii). Asumamos entonces que $\mathrm{gr}(p) > 1$, tenemos dos casos:

- **Caso 1:** (p tiene solamente una raíz)
  Si p tiene solo una raíz, llamemosla $a \in \mathbb{C}$, entonces p es de la forma:
  $$p(x) = \lambda(x - a)^n$$
  De donde por la parte (iii), tenemos que $p(x)$ no es inyectiva.
- **Caso 2:** (p tiene al menos dos raíces)
  Si p tiene al menos dos raíces, llamemoslas $a, b \in \mathbb{C}$. Entonces $p(a) = p(b) = 0$, de donde concluimos que $p(x)$ no es inyectiva.

Como de cualquier manera $p(x)$ no es inyectiva, concluimos.

P19. [Una productoria]
El objetivo de este problema es probar que para $m \geq 2$:

$$\prod_{k=1}^{m-1} \sin\left(\frac{k\pi}{m}\right) \doteq \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\cdot \ldots \cdot \sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = \frac{m}{2^{m-1}}$$

Para esto se le propone lo siguiente:

a) Pruebe que:

$$\prod_{k=1}^{m-1}(1-w_k) = (1-w_1)(1-w_2)\ldots(1-w_{m-2})(1-w_{m-1}) = m$$

Donde $w_1, \ldots, w_{m-1}$ son las raíces m-ésimas de la unidad en el orden usual.
Hint: Considere el polinomio $p(z) = z^m - 1$.

b) Use la parte anterior conjugando para demostrar que:

$$m^2 = 2^{m-1}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{4\pi}{m}\right)\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\cos\left(\frac{2(m-2)\pi}{m}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\right)$$

c) Concluya.

Solución 19.

a) Notemos que las raíces del polinomio $p(x)$ son exactamente las raíces $m-$ésimas de la unidad, luego:

$$z^m - 1 = p(z) = (z-1)(z-w_1)(z-w_2)\ldots(z-w_{m-2})(z-w_{m-1})$$

Dividiendo a ambos lados por $(z-1)$ tenemos que:

$$\frac{(z^m-1)}{(z-1)} = (z-w_1)(z-w_2)\ldots(z-w_{m-2})(z-w_{m-1})$$

Dividamos $z^m - 1$ por $z-1$ con Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{array}$$

Es decir:

$$\frac{(z^m-1)}{(z-1)} = z^{m-1} + z^{m-2} + \ldots + z + 1$$

Igualando con lo que teníamos antes:

$$z^{m-1} + z^{m-2} + \ldots + z + 1 = (z-w_1)(z-w_2)\ldots(z-w_{m-2})(z-w_{m-1})$$

Reemplazando $z = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} 1^{m-1} + 1^{m-2} + \ldots + 1 + 1 &= (1-w_1)(1-w_2)\ldots(1-w_{m-2})(1-w_{m-1}) \\ m &= (1-w_1)(1-w_2)\ldots(1-w_{m-2})(1-w_{m-1}) \qquad (1) \end{aligned}$$

Que era lo pedido.

b) Conjugando (1) tenemos:

$$\begin{aligned} \overline{m} &= \overline{(1-w_1)(1-w_2)\dots(1-w_{m-2})(1-w_{m-1})} \\ m &= \overline{(1-w_1)}\cdot\overline{(1-w_2)}\cdot\dots\cdot\overline{(1-w_{m-2})}\cdot\overline{(1-w_{m-1})} \qquad (2) \end{aligned}$$

Multiplicando (1) y (2) obtenemos:

$$m^2 = |1-w_1|^2|1-w_2|^2\dots|1-w_{m-1}|^2|1-w_{m-1}|^2 \qquad (3)$$

Notemos que como todo $w_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} |1-w_k|^2 &= \left|1-\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right|^2 \\ &= \left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \\ &= 1-2\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + \underbrace{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{m}\right)+\sin^2\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}_{=1} \\ &= 2\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\right) \end{aligned}$$

Ocupando este hecho en (3) tenemos:

$$\begin{aligned} m^2 &= 2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)2\left(1-\cos\left(\frac{4\pi}{m}\right)\right)\cdot\dots\cdot 2\left(1-\cos\left(\frac{2(m-2)\pi}{m}\right)\right)2\left(1-\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\right) \\ m^2 &= 2^{m-1}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{4\pi}{m}\right)\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\cos\left(\frac{2(m-2)\pi}{m}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\right) \end{aligned}$$

Que era lo pedido.

c) Recordemos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\begin{aligned} \cos(2u) &= 2\cos^2(u)-1 \\ &= 2(1-\sin^2(u))-1 \\ &= 1-2\sin^2(u) \end{aligned}$$

Es decir:

$$(1-\cos(2u)) = 2\sin^2(u)$$

Ocupando este hecho en la parte *b*) tenemos que:

$$\begin{aligned} m^2 &= 2^{m-1}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{4\pi}{m}\right)\right)\cdot\dots\cdot\left(1-\cos\left(\frac{2(m-2)\pi}{m}\right)\right)\left(1-\cos\left(\frac{2(m-1)\pi}{m}\right)\right) \\ m^2 &= 2^{m-1}\left(2\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)\left(2\sin^2\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)\cdot\dots\cdot\left(2\sin^2\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right)\right)\left(2\sin^2\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\right) \\ m^2 &= 2^{m-1}2^{m-1}\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)\left(\sin^2\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)\cdot\dots\cdot\left(\sin^2\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right)\right)\left(\sin^2\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\right) \\ m^2 &= \left(2^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\cdot\dots\cdot\sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\right)^2 \qquad (4) \end{aligned}$$

Notando que tanto m como $\left(2^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\cdot\dots\cdot\sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)\right)$ son positivos, tomando raíz sobre (4) tenemos:

$$m = 2^{m-1}\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\cdot\dots\cdot\sin\left(\frac{(m-2)\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{(m-1)\pi}{m}\right)$$

Dividiendo por 2^{m-1} concluimos la identidad buscada.