Descomposición de Jordan

Gonzalo Flores García

Julio 2017

Problema 1. Obtenga la descomposición de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Solución. Se puede verificar que

$$p_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (2 - \lambda)^4,$$

con lo que el único valor propio de A es $\lambda = 2$, con multiplicidad algebraica $\alpha_A(2) = 4$. Busquemos los vectores propios para este valor propio. Para ello debemos resolver el sistema $(A - 2I)v = 0$, es decir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Notamos inmediatamente que las filas 1,2 y 4 definen la misma ecuación ($v_4 = 2v_2$). De la fila 3 se deduce que

$$v_1 = v_4 - 5v_2 = 2v_2 - 5v_2 = -3v_2.$$

Así, obtenemos que la solución del sistema está dada por

$$v = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

De esta forma obtenemos que la multiplicidad algebraica del único valor propio es $\gamma_A(2) = 2$. en particular, la matriz no es diagonalizable. Obtengamos ahora vectores propios generalizados para construir la descomposición de Jordan. Para ello, debemos estudiar el sistema $(A - 2I)v = u$, para u perteneciente al subespacio vectorial generado por los vectores ya obtenidos. Más concretamente, debemos resolver el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -1 & -3\alpha \\ 0 & -2 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 5 & 0 & -1 & \beta \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 2\alpha \end{array}\right),$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Notamos que el sistema es incompatible si $\alpha = 0$ (viendo, por ejemplo, las filas 1 y 2). Luego, para tener soluciones debemos imponer $\alpha = 0$. Imponiendo además $\beta = 1$ (para no tener un lado derecho nulo) el sistema resulta

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right),$$

de donde como antes, se deduce que $v_4 = 2v_2$ y

$$v_1 = v_4 - 5v_2 + 1 = 2v_2 - 5v_2 + 1 = -3v_2 + 1,$$

con lo que finalmente la solución resulta

$$v = \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Antes de continuar, detallemos un poco lo recién realizado. Cuando llegamos a la conclusión de que $\alpha = 0$, significa que el vector asociado $(-3, 1, 0, 2)$ no cuenta con vectores propios generalizados. Luego, la solución obtenida entrega un vector propio generalizado para $(0, 0, 1, 0)$. Es decir, hasta ahora contamos con los vectores

$$v^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow v^{2,1} = \begin{pmatrix} -3\gamma + 1 \\ \gamma \\ \delta \\ 2\gamma \end{pmatrix}$$

donde $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. La pregunta que surge ahora es que valores debemos asignar a dichas constantes. Para responder esto, debemos seguir con el procedimiento, ya que aun nos falta encontrar un vector para completar una base de $\mathbb{R}^4$. Dichas constantes deben ser tales que el siguiente sistema a evaluar ($(A - 2I)v = v^{2,1}$) no sea incompatible. Planteando el sistema nos queda que

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -1 & -3\gamma + 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & \gamma \\ 1 & 5 & 0 & -1 & \delta \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 2\gamma \end{array}\right).$$

Para que dicho sistema sea compatible, de las filas 1 y 2 vemos que $-3\gamma+1 = -\gamma$, es decir, $1 = 2\gamma$. En vista de esto, imponemos $\gamma = 1/2$ y $\delta = 0$, con lo que

$$v^{2,1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema a analizar queda como

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Vemos así que $v_4 = 2v_2 + 1/2$ y que

$$v_1 = v_4 - 5v_2 = 2v_2 + 1/2 - 5v_2 = -3v_2 + 1/2,$$

con lo que la solución finalmente queda

$$v = \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

con lo que se obtuvieron los vectores buscados. Más precisamente, tenemos que

$$v^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow v^{2,1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow v^{2,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde hemos ponderado los vectores para evitar la aparición de fracciones (recordar que esto era posible para los vectores propios, y también lo es para los vectores propios generalizados, teniendo el cuidado de ponderar todos los vectores propios generalizados asociados a un vector propio dado por el mismo factor y ponderar dicho vector también).
En virtud de lo anterior, podemos construir las matrices P y J como

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Resumen del método

En general, para obtener la descomposión de Jordan de una matriz dada, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Calcular el polinomio característico $p_A(\lambda)$ y hallar los valores propios de A.
2. Obtener una base de vectores propios para A.
3. Aquí tenemos 2 casos:
i) Si para todo valor propio las multiplicidades algebraica y geométrica coinciden, la matriz es diagonalizable. En este caso la matriz J es diagonal y P está conformada por los vectores propios de A.
ii) Para cada valor propio tal que las multiplicidades algebraica y geométrica no coinciden, realizamos el siguiente proceso:
(a) Definimos W como el subespacio propio asociado al valor propio actual, cuya base está dada por los vectores propios asociados.
(b) Resolvemos el sistema $(A - \lambda I)v = u$ para $u \in W_\lambda$. Más precisamente, si $\{v^1, \dots, v^k\}$ es una base de W_λ, entonces resolvemos el sistema

$$(A - \lambda I)v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i.$$

En la práctica, se resuelven los sistemas

$$(A - \lambda I)v = v^i.$$

Si todos ellos resultan ser incompatibles, es necesario encontrar valores de λ_i para obtener una combinación lineal que haga que el sistema tenga solución. De ser este el caso, debemos reemplazar uno de los vectores de la base de W_λ por la combinación lineal mencionada (cualquiera que sea utilizado en dicha combinación). En cualquier caso, contaremos finalmente con una base de W_λ tal que el último sistema escrito tiene solución para al menos uno de los vectores de dicha base.
(c) Para cada elemento de la base de W tal que el sistema $(A - \lambda I)v = v^i$ tenga solución, realizamos el siguiente proceso:
I. Resolvemos el sistema $(A - \lambda I)v = v^i$, cuya solución es siempre un elemento de W más un vector constante, es decir

$$(A - \lambda I)v = v^i \iff v = w + u\,,\, w \in W.$$

II. Si el sistema $(A - \lambda I)v = u$ es compatible, definimos $v^{i,1} = u$. Si no, buscamos una combinación lineal de la base de W tal que el sistema

$$(A - \lambda I)v = u + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n v^n$$

sea compatible y definimos $v^{i,1}$ como u más dicha combinación lineal.

III. Iteramos el procedimiento, es decir, resolvemos el sistema $(A - \lambda I)v = v^{i,j}$, de donde obtenemos u tal que $v = u + w$, con $w \in W$. Si el sistema $(A - \lambda I)v = u$ es compatible, definimos $v^{i,j+1} = u$. Si no, buscamos una combinación lineal de la base de W y vectores propios generalizados $v^{i,1}, \ldots, v^{i,j}$ tal que

$$(A - \lambda I)v = u + \sum_{n=1}^{k} \lambda_n v^n + \sum_{n=1}^{j} \mu_n v^{i,n}$$

sea compatible, y definimos $v^{i,j+1}$ como dicha combinación lineal. Si tal combinación lineal no existe, ya hemos terminado con esta cadena.