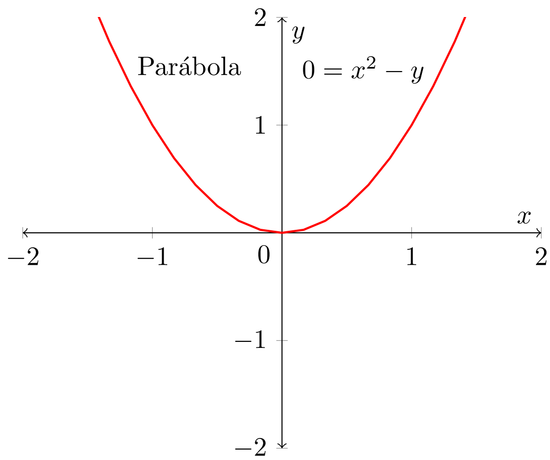
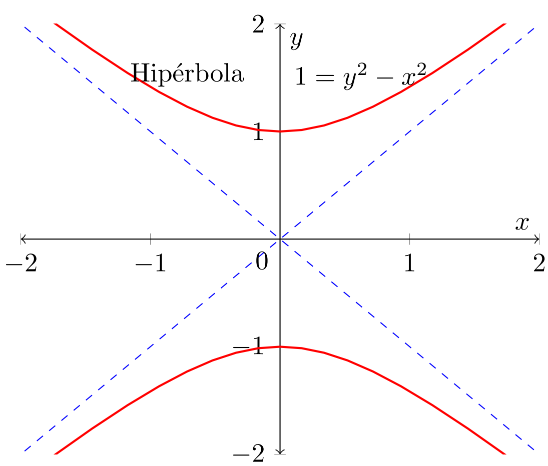
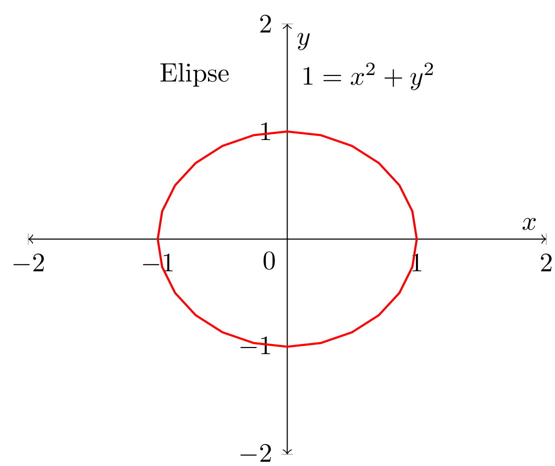
Francisco Fernández

Cónicas

Queremos estudiar las figuras dadas por la ecuación $\vec{x}^t A\vec{x} + b^t\vec{x} + = c$ (con $c \geq 0$).
Recordemos las 3 formas cónicas existentes en $\mathbb{R}^2$:







Parábola	$0 = x^2 - y$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
Hipérbola	$0 = -x^2 + y^2$	$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Elipse	$0 = x^2 + y^2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Todas las cónicas son cambios de variables de estas tres ecuaciones.
Es decir son cambios de tamaño, traslaciones y rotaciones de estas 3.
La idea es llegar a una matriz diagonal que se parezca a alguna de las matrices de los tres casos de la tabla.
¿Como llegamos a una matriz diagonal? Diagonalizando A, por supuesto.

Primero debemos asegurarnos que A sea simétrica. Con esto sabemos que tendrá una descomposición de la forma:

$$A = PDP^t$$

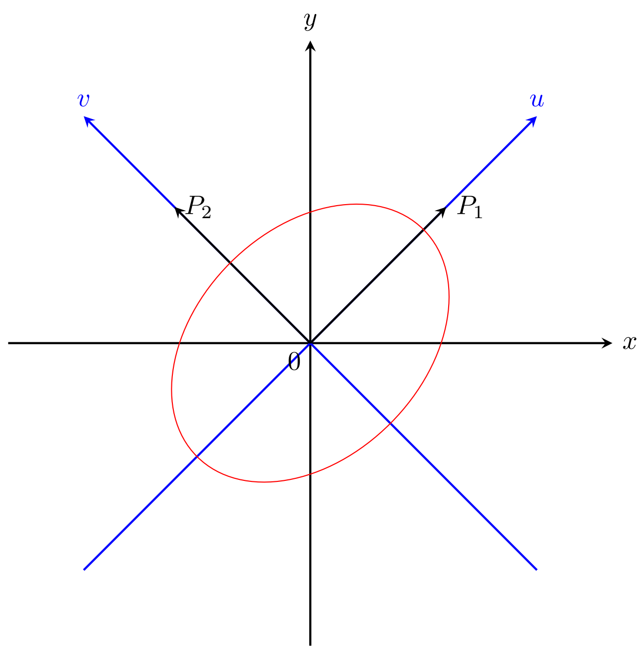
Donde D es la diagonal de los valores propios de A. Luego es fácil ver que:

$$c = \vec{x}^t A\vec{x} + b^t\vec{x} = \vec{x}^t PDP^t\vec{x} + b^t PP^t\vec{x} = (P^t\vec{x})^t D(P^t\vec{x}) + (P^t b)^t(P^t\vec{x})$$

Luego definiendo $\vec{u} = P^t \vec{x}$ y $d = P^t b$ se obtiene la ecuación:

$$c = \vec{u}^t D \vec{u} + d^t \vec{u}$$

Notemos que el cambio de variables nos rota la figura, siendo ahora los ejes generados por las dos columnas P_1 y P_2 de P:



La gracia de este cambio de variables es que se hizo cargo de la rotación, es decir ya no van a haber términos xy molestando. Luego va a ser mucho más fácil llegar a algo que se parezca a los 3 ejemplos del principio, pues sólo queda hacerse cargo de las traslaciones (sumar constantes) y de cambios de escala (multiplicar constantes positivas).

Además la matriz de valores propios D nos va a dar una pista de que forma se esta viendo.
Pues si se parece al de la parábola (un valor cero y otro $\neq 0$) significa que el dibujo se parecerá a una parábola.
Si se parece al de la hipérbola (valores propios de signos distintos) significa que el dibujo se parecerá a una hipérbola.
Si se parece al de la elipse (valores propios de mismo signo) significa que el dibujo se parecerá a una elipse.

Ejemplo 1:

$$1 = 3x^2 + 3y^2 + 2xy$$

En este caso $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si uno hace el cálculo da que tiene como valores propios al 4 y al 2, con vectores propios

$$P_1 = v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } P_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ respectivamente.}$$

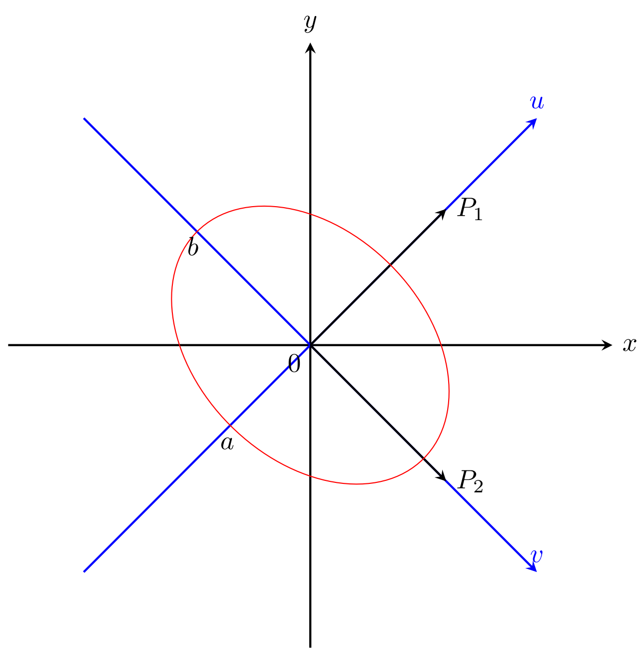
Como los valores tienen el mismo signo, sabemos que debería dar el dibujo de una elipse (a menos que se llegue a un caso degenerado como $x^2 + y^2 = -4$).
Con lo anterior sabemos que A es de la forma $A = PDP^t$ donde:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el cambio la ecuación queda como ($d = 0$ pues $b = 0$):

$$1 = \vec{u}^t D \vec{u} = 4u^2 + 2v^2 = \left(\frac{u}{2^{-1}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{2}^{-1}}\right)^2 = \left(\frac{u}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2$$

Lo cual es sólo un cambio de escalas de la ecuación de la elipse de la tabla.
(Donde $a = 2^{-1} = 0{,}5$ y $b = \sqrt{2}^{-1} \approx 0{,}707$).



Ejemplo 2:

$$1 = x - 4xy$$

En este caso $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si uno hace el cálculo da que tiene como valores propios al -2 y al 2, con vectores propios

$$P_1 = v_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } P_2 = v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ respectivamente.}$$

Como los valores tienen signos distintos, sabemos que debería dar el dibujo de una hipérbola (a menos que se llegue a un caso degenerado).
Con lo anterior sabemos que A es de la forma $A = PDP^t$ y $d = P^t b$ donde:

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ , } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el cambio la ecuación queda como:

$$1 = \vec{u}^t D \vec{u} + d^t \vec{u} = -2u^2 + 2v^2 + \frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}$$

Ahora debemos deshacernos de los términos con u y con v sueltos, para eso completamos cuadrados:

$$2u^2 - \frac{u}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2}u)^2 - 2(\sqrt{2}u)\frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \left(\sqrt{2}u - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

De manera similar:

$$2v^2 + \frac{v}{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}v + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

Con esto nos hicimos cargo de la traslación $T = \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$. Quedando la ecuación como:

$$1 = \left(\sqrt{2}v + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \left(\sqrt{2}u - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} = \left(\sqrt{2}v + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\sqrt{2}u - \frac{1}{4}\right)^2$$