Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA3403-5 - Probabilidades y Estadística

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Auxiliar 2 - Probabilidades totales y Bayes

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Diego Fuentealba Z [dieego.fz@gmail.com]
Cristóbal Parraguez C [cristobal.parraguez@gmail.com]

P1. Determine la dependencia o indendencia entre (1) y (2)

(a) Lanzar dos dados (1) que el primero sea 1, (2) que sumen 7

(b) Lanzar 3 monedas (1) que las dos primeras sean cara, (2) que salgan al menos dos caras

(c) Tener dos urnas, la primera con 3 pelotas blancas y 2 negras, y la segunda con 4 blancas y 2 negras (1) sacar una pelota de cada urna y que ambas sean blancas (2) intercambiar una pelota al azar de la segunda urna a la primera

(d) y de la primera urna a la segunda?

Solución:

(a) $\mathrm{P}(1) = \frac{1}{6}$ es equivalente a lanzar un dado y que sea 1
$\mathrm{P}(1|2) = \frac{1}{6}$ Ya que suman 7 las combinaciones posibles son 6, de esas 6 solo una parte con 1
Finalemente ya que P(1)=P(1|2) $\rightarrow$ Independientes

(b) $\mathrm{P}(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$\mathrm{P}(1|2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ Ya que se consiguen al menos dos caras solo hay 4 combinaciones posibles, de las cuales 2 tienen cara en la primera y en la segunda posición
Finalmente $\mathrm{P}(1) \neq \mathrm{P}(1|2) \rightarrow$ Dependientes

(c) $\mathrm{P}(1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{5}$
Primero hay que notar que uno puede pasar una pelota blanca o una negra, llamare 2_N a pasar una negra y 2_B a pasar una blanca
$\mathrm{P}(1|2_N) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$
$\mathrm{P}(1|2_B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$
$\mathrm{P}(1|2_B) = \mathrm{P}(1|2_N) = \mathrm{P}(1) \rightarrow$ Inependiente

(d) $\mathrm{P}(1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{5}$ Sigue igual, y el proceso es el mismo
$\mathrm{P}(1|2_N) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$
$\mathrm{P}(1|2_B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{14}$
$\mathrm{P}(1|2_B) \neq \mathrm{P}(1|2_N) \neq \mathrm{P}(1) \rightarrow$ Dependiente

P2. Hay tres bolsas que tienen, cada una dos monedas. Las de la primera son de oro, las de la segunda son de plata y las de la tercera son una de plata y otra de oro. Se escoge una bolsa al azar y de ella una moneda también al azar. Si la moneda es de oro, ¿cuál es la probabilidad de que la otra moneda en la bolsa sea de oro también?

Solución:

Primero algunas definiciones

O_1 = la primera moneda es de oro

B_n estar en la Bolsa n, n $\in [1, 2, 3]$

Hay que notar que estar en B_1 es equivalente a sacar la segunda de oro.

P(B_1|O$_1$)= $\frac{P(O_1|B_1)\cdot P(B_1)}{\sum P(O_1|B_n)\cdot P(B_n)} = \frac{1}{1+0+1/2} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$ (Bayes)

P3. El grupo GNR se separó, y tres de sus integrantes siguieron haciendo conciertos. En los conciertos del vocalista Axel un 85% era fan de GNR, en los del bajista Maqueigan un 90% era fan de GNR y en los del guitarrista Slsh un 95% era fan de GNR. Desde que se separaron Axel ha hecho 125 conciertos, Maqueigan 150 y Slsh 175. Si se selecciona una persona al azar de esos conciertos.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que fuera fan de GNR?

(b) Suponiendo que la persona es fan de GNR. ¿Cuál es la probabilidad de que esté en un concierto de Slsh?

Solución:

(a) Primero algunas definiciones:
A = estar en un concierto de Axel
M = estar en un concierto de Maqueigan
S = estar en un concierto de Slsh
GNR = ser fan de GNR
P(GNR) = $P(GNR|A)\cdot P(A) + P(GNR|M)\cdot P(M) + P(GNR|S)\cdot P(S)$
$= 0.85\cdot\frac{125}{450} + 0.9\cdot\frac{150}{450} + 0.95\cdot\frac{175}{450} \approx 0.91$ (Probabilidad Total)

(b) $P(S\Big|GNR) = \frac{P(GNR|S)\cdot P(S)}{P(GNR|A)\cdot P(A)+P(GNR|M)\cdot P(M)+P(GNR|S)\cdot P(S)} \approx 0.41$ (Bayes)

P4. El MyM Azul fue introducido por primera vez en 1995. Antes los colores de la bolsa estaban repartidos asi: 30% Café, 20% Amarillo, 20%Rojo, 10% Verde y 20% Anaranjado. Con el ingreso del Azul quedarón de la siguiente manera: 24% Azul, 20%Verde, 16%Anaranjado, 14%Amarillo, 13%Rojo y 13%Café.

Un amigo trae 2 bolsas de MyM, una de ellas es del 1994 y otra del 1996, sin poder distinguirlas, pero te regala un MyM de cada bolsa. Si los MyM son de color Verde y Amarillo. ¿Cuál es la probabilidad de que el MyM amarillo sea de la bolsa del 1994?

Solución:

Primero algunas definiciones:

Notemos que hay dos bolsas las cuales llamremos bolsa 1 y bolsa 2

A = (bolsa 1 es de 1994, bolsa 2 es de 1996)

B = (bolsa 2 es de 1994, bolsa 1 es de 1996)

E = (Amarillo en bolsa 1, Verde en bolsa 2)

P(A) = P(B) = $\frac{1}{2}$

P(E$|A$) $= 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$

P(E$|B$) $= 0.14 \cdot 0.1 = 0.014$

P(A$\Big|E) = \frac{P(E|A) \cdot P(A)}{P(E|A) \cdot P(A) + P(E|B) \cdot P(B)} = \frac{40}{54} \approx 0.74$ (Bayes)