Auxiliar 3 - Variable Aleatoria, Esperanza y Varianza

Profesor: Vicente Acuña
Auxiliares: Diego Fuentealba Z [dieego.fz@gmail.com]
Cristóbal Parraguez C [cristobal.parraguez@gmail.com]

P1. Morti esta buscando a su abuelo, al hombre pajaro y a su hermana por las distintas dimensiones, pero no sabe como ocupar el transporador, solo ha visto a su abuelo usarlo un par de veces, por lo que tiene una probabilidad p de usarlo mal (no teletransportandose a ningun lugar) y cada intento es independiente del anterior. Para colmo la federación lo encontrará si usa el transportador más de 6 veces (y eso es malo).

(a) Cual es la probabilidad de que Morty encuentre a todos sin que la federación lo atrape.

(b) Cuanto es el valor maximo de p tal que aún se espere que Morti logre su cometido sin ser descubierto.

Solución:

Definiremos X como una v.a que exprese en el intento en que logra el tercer exito (establecimos en el aux que morti no puede encontrar a su abuelo primero, ni segundo, ya que él sabe como usar el transportador y eso incrementaría la probabilidad de uso correcto a 1, por lo que cambiamos el problema a que morti solo sabe donde esta su hermana, la cual sabe donde está el hombre pájaro, él cual sabe donde esta el abuelo).

Notar que X es una binomial negativa de parametros r=3 y p=(1-p)

(a) P(X≤6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = $\binom{2}{2} \cdot p^0 \cdot (1-p)^3 + \binom{3}{2} \cdot p^1 \cdot (1-p)^3 + \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 + \binom{5}{2} \cdot p^3 \cdot (1-p)^3$

(b) E(X) = $\frac{r}{p} = \frac{3}{(1-p)} = 6 \to p = 1/2$

P2. En un aeropuerto un 0.8% de la gente con su pasaje comprado termina perdiendo el vuelo, los registos historcos indican que en promedio al día hay 96 retrasos y 24 adelantos.

(a) El jefe quiere evaluar el funcionamiento, así que sale a dar una ronda de 15 min ¿Cuál es la probabilidad de que se tope con más de 2 retrasos?

(b) Si hay un vuelo en particular muy solicitado, y ya vendio sus 500 cupos, ¿cuantos pasajes extra se pueden vender, si queremos que la probabilidad de que todos tengan asiento sea a lo menos 90%?

(c) El encargado de anuncias los retrasos y los adelantos por alto parlante fue al baño por 5 min ¿Cual es la probabilidad de que no haya podido anunciar a lo más 2 sucesos?

Solución:

(a) La cantidad de errores cada 15 min es una v.a que llamaremos W y se comporta como una Poisson de $\lambda = \frac{96}{24\cdot 4}$
P(W$\geq$ 3) = 1 - P(W$\leq$ 2) = 1 - [P(W = 0) + P(W = 1) + P(W = 2)] = 1 - $e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2})$

(b) Está claro que mientras mas vendamos menor es la probabilidad de que todos tengan asiento, así que hay que llegar lo más cercano a %90 sin pasarse para encontra la mayor cantidad de pasajes que se pueden vender extra. También asumimos que la gente que esta comprando el pasaje extra, tiene una probabilidad iagual a 1 de asistir al vuelo. llamaremos I a la v.a de inasistencia al vuelo.
P(I$\geq$x) = 1 - P(I$\leq$(x-1))
Notar que $\lambda = 0.008 \cdot 500 = 4$

P(I$\leq$(x-1)) $\leq$ 0.1 iremos explorando con los valores de x
P(I$\leq$(x-1)) = 0.0183 con x=1
P(I$\leq$(x-1)) = 0.0916 con x=2
P(I$\leq$(x-1)) = 0.2381 con x=3

La mayor cantidad de tikets que podemos vender son 2 y la probabilidad de que todos tegan asiento es de 0.9084, si vendieramos 3 la probabilidad sería menor a 0.9

(c) La cantidad de Retrasos cada 5 min es una v.a que llamaremos R y se comporta como una Poisson(λ $\frac{96}{24\cdot 12}$)
La cantidad de Adelantos cada 5 min es una v.a que llamaremos A y se comporta como una Poisson($\lambda = \frac{24}{24\cdot 12}$
La cantidad de Adelantos y Retrasos cada 5 min es unav.a que llamaremos A + R y se comporta como una Poisson($\lambda = \frac{96}{24\cdot 12} + \frac{24}{24\cdot 12}$)
P(A+R$\leq$2) = P(A+R = 0) + P(A+R = 1) + P(A+R = 2) = $e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2})$

P3. En un naipe ingles ¿cuál es la probabilidad de al sacar una mano de 5 cartas, esta no tenga más de 2 corzones?

Solución:
Bueno aqui solo hay que notar que La v.a de cantidad de corazones en la mano que llamatemos C es una Hipergeométrica de parametros N = 52 n = 5 y r = 13
P(C$\leq$2) = P(C=0) + P(C=1) + P(C=2) = $\frac{\binom{13}{0}\cdot\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{39}{4}}{\binom{52}{5}} + \frac{\binom{13}{2}\cdot\binom{39}{3}}{\binom{52}{5}}$

P4. Un pueblo tiene m caminos individuales, cada uno con n puentes, los cuales los conectan con la única ciudad en las cercanias, frente a una catástofre natural la probabilidad de que un puente se caiga es p, independiente de otros puentes.

(a) ¿Cuál es la porbabilidad de que la otra ciudad no pueda enviar ayuda por tierra?

(b) Ahora suponga que después de cada puente hay una pequeña villa, es decir, hay n villas, ahora en cada villa puedes cambiar de camino. ¿Cuál es la probabilidad de que la ciudad vecina no pueda enviar ayuda por tierra?

Solución:

La base del ejercicio es en notar que son variables Binomiales, pero como definamos el éxito es la clave

(a) El éxito en este caso lo definimos como un camino con todos sus puentes en buen estado lo cual tiene una probabilidad de p^n. Finalmente la cantidad de caminos enteros es una v.a binomial que llamaremos X, de parametros n = m y p = p^n,la notación no es muy comoda, pero es bastante usual que pase esto, para podr enviar ayuda por tierra basta con que AL MENOS un camino esté completamente bueno, por lo tanto la respuesta es
P(X≥1)= 1 - P(X=0) = 1 - $\binom{m}{0} \cdot (p^n)^0 \cdot (1-p^n)^m$

(b) Ahora definimos éxito como que al menos un camino entre villas este bueno, con un puente bueno, lo que tiene una probabilidad de $(1-(1-p)^m)$ .El proceso es el mismo que el anterior, solo que la binomial cambio de parametros, ahora $n = nyp = (1-(1-p)^m)$, y esta vez necesitamos n exitos
P(X=n) = $\binom{n}{n} \cdot (1-(1-p)^m)^n \cdot ((1-p)^m)^0$