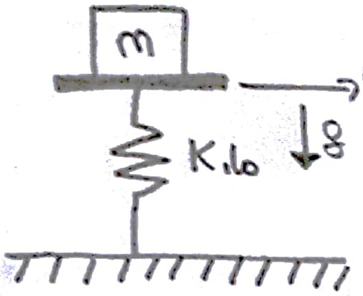
Manuel Torres V.

Pauta auxiliar extra 4:

P1



→ La plataforma posee una masa despreciable.

a) Para hallar la posición de equilibrio, nos acordamos de las condiciones:

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \qquad \omega = 0$$
$$\Sigma \vec{F} = 0 \qquad V = 0$$

En este caso, no hay torque, y diremos que el sistema en estado estacionario está quieto, por lo que $\omega = 0 \wedge V = 0$, por lo que nos queda imponer que $\Sigma \vec{F} = 0$.

$\Sigma \vec{F} = 0$ (para c/u de los componentes del sistema).

Plataforma:

$$\Rightarrow N + K(y - l_0) = 0$$
$$\Rightarrow N = -K(y - l_0) \qquad (1)$$

Caja:

$$\Rightarrow N - mg = 0$$
$$\Rightarrow N = mg \qquad (2)$$

Por acción y reacción, podemos relacionar (1) y (2):

$$\Rightarrow -K(y - l_0) = mg$$
$$\Rightarrow -K(y_{eq} - l_0) = mg$$
$$\Rightarrow y_{eq} = \frac{-mg}{K} + l_0 \quad //$$

b) Para hallar ω_0, necesitamos analizar las ecuaciones de movimiento del sistema (o manejar muy bien la teoría y hallarla al ojo).

$$\Rightarrow N - mg = m\ddot{y} \quad \text{, reemplazando (1)}$$
$$\Rightarrow -K(y - l_0) - mg = m\ddot{y}$$
$$\Rightarrow m\ddot{y} + K\left(y - l_0 + \frac{mg}{K}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{y} + \left(\frac{K}{m}\right)(y - y_{eq}) = 0 \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Observación: Comúnmente $l_0 = y_{eq}$, pero en esta caso el equilibrio del resorte se altera por otra fuerza, la cual es constante, y esto nos permite hacer lo siguiente (b):

$$m\ddot{y} + K(y - l_0) + mg = 0$$

$$\Rightarrow m\ddot{y} + K\left(y - l_0 + \frac{mg}{K}\right) = 0$$

y en la parte (a) demostramos que $\left(l_0 - \frac{mg}{K}\right) = y_{eq}$, por lo que ahora tenemos una expresión más general para cuando ajustamos la EDO:

$$\boxed{\ddot{\tilde{y}} + \frac{K}{m}(y(t) - y_{eq}) = 0}, \quad \tilde{y}(t) = y(t) - y_{eq}$$

Con $y_{eq} = l_0$ sólo cuando la única fuerza es causada por el resorte.

c) De la parte (b), tenemos la EDO, cuya solución es:

$$\tilde{y}(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Como condición, se estira hasta x_0 y se suelta del reposo

$$\Rightarrow \tilde{y}(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (3)$$

$$\wedge \ \dot{\tilde{y}}(0) = 0$$

A esto se le llama problema de Cauchy (cuando tenemos la EDO y un valor conocido en alguno de sus puntos), esto nos permite despejar su desfase, derivando (3) tenemos:

$$\Rightarrow \dot{\tilde{y}}(t) = -y_0 \omega_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Evaluando $\dot{y}(0) = 0$

$$\Rightarrow 0 = \cancel{-y_0 \omega_0} \operatorname{sen}(\varphi_0)$$

$$\Rightarrow 0 = \operatorname{sen}(\varphi_0)$$

$$\Rightarrow 0 = \varphi_0 \ //$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\tilde{y}(t) = y(t) - y_{eq} \Rightarrow \dot{\tilde{y}}(t) = \dot{y}(t) \Rightarrow \ddot{\tilde{y}}(t) = \ddot{y}(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + l_0 - \frac{mg}{K} \longrightarrow \text{Ecuación de movimiento}$$

$$\Rightarrow \underbrace{y(t) - l_0}_{\text{estiramiento}} = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{mg}{K} \qquad (4)$$

⊛ Aclaración: $y_0 = x_0 + \frac{mg}{K}$, donde x_0 es respecto a l_0 e y_0 respecto a y_{eq}.

Por otro lado, sabemos que:

$$-N = K(y - l_0)$$

$$(4) \Rightarrow -N = K\left(y_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{mg}{K}\right)$$

$$\Rightarrow -N = K(y_0\cos(\omega_0 t)) - mg$$

Pero buscamos que N no se anule, osea $N > 0$ (N no puede ser menor a cero).

$$\Rightarrow N > 0$$

$$\Rightarrow -K(y_0\cos(\omega_0 t)) + mg > 0$$

$$\Rightarrow mg > K y_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{K\cos(\omega_0 t)} > y_0$$

Pero la amplitud máxima se da en $t = 0 \Rightarrow \cos(0\,\omega_0) = 1$

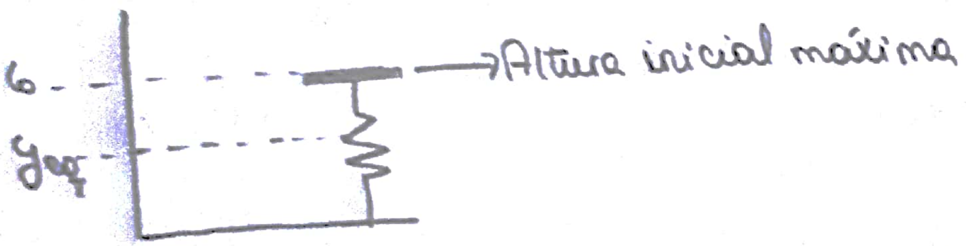
$$\Rightarrow \frac{mg}{K} > y_0$$

Como $y_0 - \frac{mg}{K} = x_0 \Rightarrow y_0 = x_0 + \frac{mg}{K}$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{mg}{K}} > x_0 + \cancel{\frac{mg}{K}}$$

$$\Rightarrow 0 > x_0$$

Graficamente Tenemos:



d) Ahora Tenemos una fuerza de roce causada por el aire:

$$\Rightarrow f_v = -bv = -b\dot{\xi}(t)$$

Como se suelta desde el reposo, tenemos un P.C:

$$\dot{\xi}(0) = 0$$

$$\xi(0) = \frac{mg}{K} - \varepsilon$$

Sabemos que la solución es:

$$\xi(t) = Ae^{-t/2\tau}\cos(\Omega t + \varphi_0) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \dot{\xi}(t) = -\frac{A}{2\tau}e^{-t/2\tau}\cdot\cos(\Omega t + \varphi_0) - A\Omega e^{-t/2\tau}\operatorname{sen}(\Omega t + \varphi_0)$$

Pero por P.C:

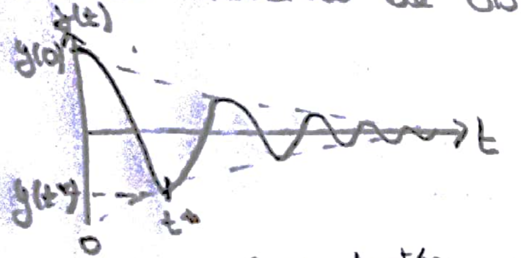
$\dot{\tilde{y}}(0)=0$

$$\Rightarrow 0=-A\left(\frac{\cos(\varphi_0)}{2\tau}+\operatorname{sen}(\varphi_0)\Omega\right)$$

$$\Rightarrow tg(\varphi_0)=\frac{-1}{2\tau\Omega} \wedge A=\frac{\tilde{y}}{\cos(\varphi_0)}$$

ya obtenidas las constantes a partir del Problema de Cauchy, podemos proceder al análisis físico.

Cuando ocurre medio periodo, se encuentra en la posición más baja, pero como es amortiguado, el periodo no es tan sencillo de obtener.



La solución $\tilde{y}(t)=Ae^{-t/2\tau}\cos(\Omega t+\varphi_0)$ nos permite afirmar que $\cos(\Omega t^*+\varphi_0)=1 \Rightarrow \Omega t^*+\varphi_0=\pi$

$$\Rightarrow t^*=\frac{\pi-\varphi_0}{\Omega}$$

$$\Rightarrow t^*=\frac{\pi-\operatorname{arct}\left(-\frac{1}{2\tau\Omega}\right)}{\Omega}$$

y como la exponencial cubre por sí sola la solución (ver explicación en la aux 9) Tenemos:

$$\Rightarrow \tilde{y}(t^*)=Ae^{-t^*/2\tau}$$

$$\Rightarrow y(t^*)=Ae^{-t^*/2\tau}+y_{eq}$$

Ahora basta con reemplazar y despejar $y(t^*)$. //