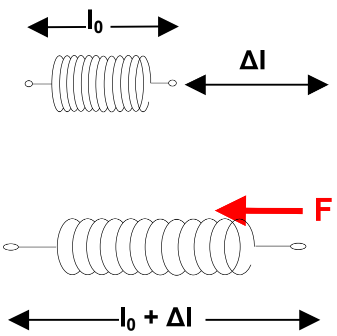
ASOCIACIÓN DE RESORTES.

1.- La fuerza y energía elásticas de un resorte o muelle.

Un resorte o muelle es un dispositivo mecánico que puede comprimirse o dilatarse y que vuelve a su posición original o natural, siempre que el desplazamiento no sea demasiado grande, existiendo un límite para estos desplazamientos, más allá de ellos, el resorte no volvería a su longitud natural. Para pequeñas compresiones o estiramientos, la fuerza ejercida por el resorte es directamente proporcional a ellos.



Si l_0 es la longitud natural del resorte y se alarga Δl cuando actúa la fuerza F, entonces:

$$\boxed{\vec{F} = -K\,\Delta\vec{l}}$$ ley de Hooke.

La energía potencial elástica de un resorte vale:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\,K\,(\Delta l)^2}$$

Entonces cada resorte o muelle viene caracterizado por una constante K, llamada *constante elástica o recuperadora*. El signo negativo indica que los sentidos de los vectores **F** y **Δl** son contrarios.

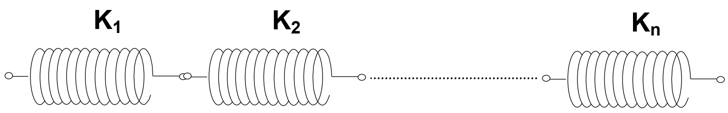
2.- Asociación o acoplamiento de resortes.

Los resortes, al igual que las resistencias eléctricas y los condensadores, pueden acoplarse de dos formas radicalmente diferentes, *serie* y *paralelo,* y por supuesto, cualquier otra asociación mixta que se pueda formar entre estas dos.

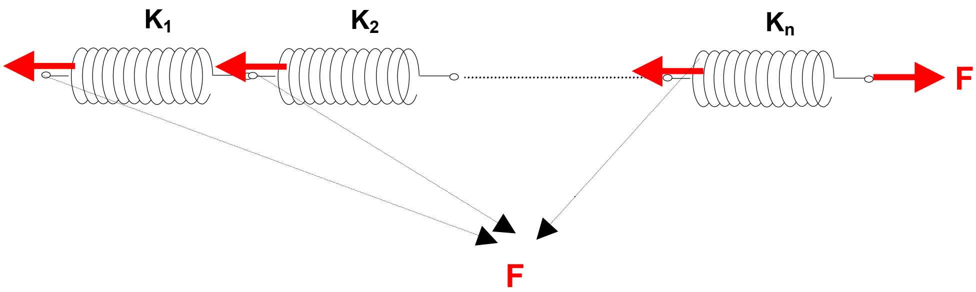
Estudiar una "batería" de resortes, conociendo las propiedades que tienen en cada una de las configuraciones base, simplifica extraordinariamente el cálculo de las mismas.

2.1.- Asociación SERIE:

n resortes están asociados o acoplados en serie, si cada uno de ellos se inserta a continuación de otro en la misma línea de acción:



Si sobre uno de los extremos de los resortes ejecutamos una fuerza de compresión o de estiramiento **F**, manteniendo fijo el otro extremo, esta fuerza, será la que actúe sobre cada uno de los resortes, sufriendo cada uno de ellos su propia compresión o estiramiento, respectivamente, según valgan sus constantes recuperadoras.



Los resortes habrán sufrido unos incrementos de longitud, directamente proporcionales a sus constantes recuperadoras. Así:

Resorte 1º :	$F = K_1\,\Delta l_1$	$\Delta l_1 = F / K_1$
" 2º:	$F = K_2\,\Delta l_2$	$\Delta l_2 = F / K_2$
....	....	....
" nº:	$F = K_n\,\Delta l_n$	$\Delta l_n = F / K_n$

Se desea conocer cual sería la **constante recuperadora** de **un solo resorte** que sometido a la **misma fuerza F que el sistema en serie**, sufriese un **incremento de longitud equivalente a la suma de los incrementos sufridos por cada uno de ellos**, y que por tanto tuviese la **misma energía potencial elástica que el sistema en serie.**

Por tanto:

$$\Delta L = \Delta l_1 + \Delta l_2 + ... + \Delta l_n$$

es decir:

$$F / K_s = F / K_1 + F / K_2 + ... + F / K_n$$

simplificando:

$$1 / K_s = 1 / K_1 + 1 / K_2 + ... + 1 / K_n$$

o lo que es lo mismo:

$$\boxed{\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} + ... + \frac{1}{K_n} \Rightarrow \quad K_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i}}}$$

De todo lo anterior se deduce que para **n** resortes acoplados en serie, si uno de los extremos se deja fijo, y sobre el otro se ejecuta una fuerza **F**, se cumple:

I. Cada resorte presenta la misma fuerza **F**, coincidente con la que actuó sobre el sistema.

II. Cada resorte presenta su propio incremento de longitud Δl_i , con un módulo inversamente proporcional a la constante elástica del resorte K_i , ya que se cumple: $\Delta l_i = F / K_i$.

III. La constante elástica del único resorte equivalente en serie, vale:

$$\boxed{K_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i}}}$$

2.1.1.- Analogías.

La asociación de resortes en serie presenta analogías con la asociación de condensadores en serie y con la de resistencias eléctricas en paralelo. Se presenta el siguiente cuadro de analogías entre ellos:

Resortes o muelles en serie	***Constante elástica o recuperadora:*** $K_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{K_i}}$	***Incremento de longitud sufrido*** $\Delta l_s = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$	***Fuerza elástica*** $F = F_i \; ; i = 1,2,..,n$	***Energía Potencial*** $U_s = \frac{1}{2} K_s (\Delta l_s)^2 = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} K_i (\Delta l_i)^2$
Condensadores en serie	***Capacidad eléctrica*** $C_s = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$	***Diferencia de Potencial*** $\Delta V_s = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$	***Carga eléctrica*** $q_s = q_i \; ; i = 1,2,..,n$	***Energía electrostática:*** $E_s = \frac{1}{2} C_s (\Delta V_s)^2 = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} C_i (\Delta V_i)^2$
Resistencias en paralelo	***Resistencia eléctrica*** $R_p = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$	***Intensidad de corriente*** $I_p = \sum_{i=1}^{n} I_i$	***Diferencia de Potencial*** $\Delta V_p = \Delta V_i ; i = 1,2,..,n$	Energía disipada por efecto Joule $E_p = R_p I_p^2 t = \sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} R_i I_i^2 t$

2.1.2.- Problema resuelto:

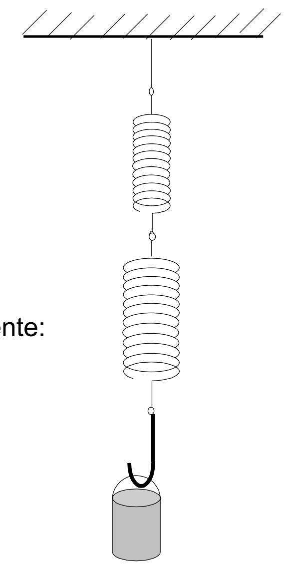
Se cuelga un cuerpo de masa **m** del extremo de dos resortes acoplados en serie, de constantes **K_1** y **K_2**. El otro extremo se cuelga del techo. Hállese:

a) El alargamiento producido por cada resorte.
b) La constante recuperadora del único resorte que hiciese su papel mecánico.
c) Compruébese que la energía potencial de éste coincide con la suma de las energías potenciales de cada uno.

(Aplicación: m = 2 Kg; K_1 = 150 $N.m^{-1}$; K_2 = 180 $N.m^{-1}$)

Resolución:

a)



Evidentemente, la fuerza a que está sometido el sistema y cada resorte es el peso del cuerpo:

F = m g

Los alargamientos serán: $\Delta l_1 = F / K_1 = m\,g / K_1$

$\Delta l_2 = F / K_2 = m\,g / K_2$

siendo el alargamiento total: $\Delta L = m\,g\,(1/K_1 + 1/K_2)$, numéricamente:

Δl_1 = 2 . 9,8 / 150 = **0,1307** m ; Δl_2 = 2 . 9,8 / 180 = **0,1089** m y

ΔL = 0,1307 + 0,1089 = **0,2396** m

b)

La constante recuperadora del sistema será :

$$K_s = \frac{1}{\sum_{1=1}^{2} \frac{1}{K_i}} = \frac{1}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}} = \frac{K_1\,K_2}{K_1 + K_2}$$ y numéricamente:

K_s = 150 180 / (150 + 180) = **81,82** $N.m^{-1}$

c)

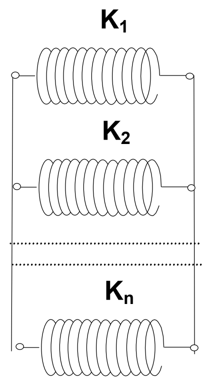
La energía potencial del resorte equivalente será:

$U_s = ½\,K_s\,(\Delta L)^2$ = ½ 81,82 $0,2396^2$ = **2,35** J ; $U_1 = ½\,K_1\,(\Delta l_1)^2$ = ½ 150 $0,1307^2$ = 1,28 J

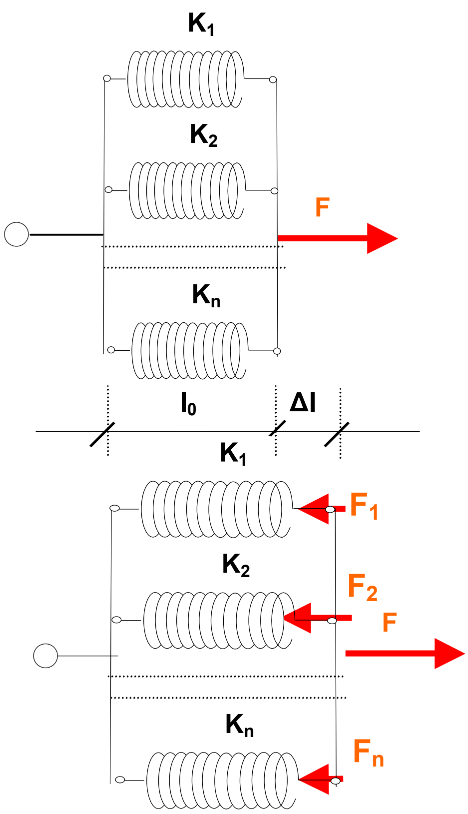
$U_2 = ½\,K_2\,(\Delta l_2)^2$ = ½ 180 $0,1089^2$ = 1,07 J; $U_1 + U_2$ = 1,28 + 1,07 = **2,35** J , con lo que queda comprobado.

2.2.- Asociación paralelo.

Consideremos **n** resortes, todos con la misma longitud natural, con constantes recuperadoras, $\mathbf{K_1}$, $\mathbf{K_2}$, **...**, $\mathbf{K_n}$, dispuestos de forma que todos sus extremos iniciales estén acoplados por un lado y los extremos finales por otro, según la figura:



Si se ejecuta una fuerza **F** de compresión o de estiramiento por uno de los extremos, manteniendo fijo el otro, por la naturaleza del acoplamiento, todos los resortes sufrirán el mismo incremento de longitud, $\mathbf{\Delta l}$ y estarán sometidos a fuerzas, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ..., $\mathbf{F_n}$, directamente proporcionales a sus constantes recuperadoras.



Es evidente que la fuerza **F** coincidirá con la suma de las fuerzas $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ..., $\mathbf{F_n}$:

Al igual que con la asociación serie, se desea conocer cual sería **la constante recuperadora del resorte único** que sufriendo el **mismo incremento de longitud que uno cualquiera de ellos de la asociación en paralelo**, y estando sometido a la fuerza **F** coincidente con la suma de las fuerzas de cada uno y por tanto tuviese la **misma energía potencial que el sistema.**

Por tanto:

$$\mathbf{F = F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_n}$$

es decir:

$$\mathbf{K_p\,\Delta l = K_1\,\Delta l + K_2\,\Delta l + \ldots. + K_n\,\Delta l}$$

simplificando:

$$\boxed{K_p = K_1 + K_2 + \ldots. + K_n = \sum_{i=1}^{n} K_i}$$

De todo esto se deduce que para **n** resortes acoplados en paralelo, si uno de los extremos se deja fijo, y sobre el otro se ejecuta una fuerza **F**, se cumple:

- **i.** La fuerza **F** que actúa sobre el sistema se reparte en **n** fuerzas, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, ..., $\mathbf{F_n}$, directamente proporcionales a las constantes recuperadoras de los resortes, pues $\mathbf{F_i = -}\, K_i\ \mathbf{\Delta l_i}$.
- ii. El incremento de longitud sufrido por cada uno de los resortes es el mismo, coincidente con el que sufriría el resorte equivalente del sistema en paralelo.
- iii. La constante recuperadora del único resorte equivalente del sistema en paralelo, será:

$$\boxed{K_p = \sum_{i=1}^{n} K_i}$$

2.2.1.- Analogías.

La asociación de resortes en paralelo presenta analogías con la asociación de condensadores en paralelo y con la de resistencias eléctricas en serie. Se presenta el siguiente cuadro de analogías entre ellos:

Resortes o muelles en paralelo	**Constante elástica o recuperadora:** $K_p=\sum_{i=1}^{n} K_i$	**Incremento de longitud sufrido** $\Delta l_p=\Delta l_i \; ; i=1,2,..,n$	**Fuerza elástica** $F=\sum_{i=1}^{n} F_i$	**Energía Potencial** $U_p=\frac{1}{2}K_p(\Delta l_p)^2=\sum_{i=1}^{n} U_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}K_i(\Delta l_i)^2$
Condensadores en paralelo	**Capacidad eléctrica** $C_p=\sum_{i=1}^{n} C_i$	**Diferencia de Potencial** $\Delta V_p=\Delta V_i \; ; i=1,2,..,n$	**Carga eléctrica** $q_p=\sum_{i=1}^{n} q_i$	**Energía electrostática:** $E_p=\frac{1}{2}C_p(\Delta V_p)^2=\sum_{i=1}^{n} E_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}C_i(\Delta V_i)^2$
Resistencias en serie	**Resistencia eléctrica** $R_s=\sum_{i=1} R_i$	**Intensidad de corriente** $I_s=I_i \; ; i=1,2,..,n$	**Diferencia de Potencial** $\Delta V_p=\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$	Energía disipada por efecto Joule $E_s=R_s I_s^2 t=\sum_{i=1}^{n} E_i=\sum_{i=1}^{n} R_i I_i^2 t$

2.2.2.- Problema resuelto.

Se cuelga un cuerpo de masa **m** del extremo de dos resortes acoplados en paralelo, de constantes **K_1** y **K_2**. El otro extremo se cuelga del techo. Hállese:

d) El alargamiento producido por cada resorte.

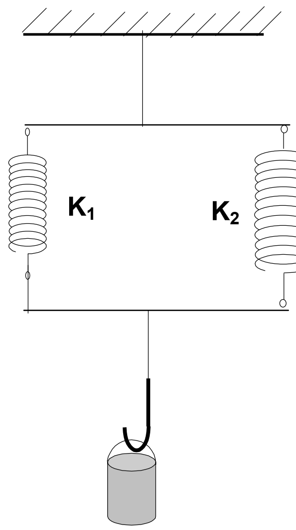
e) La constante recuperadora del único resorte que hiciese su papel mecánico.

f) Compruébese que la energía potencial de éste coincide con la suma de las energías potenciales de cada uno.

(Aplicación: m = 2 Kg; K_1 = 150 $N.m^{-1}$; K_2 = 180 $N.m^{-1}$)

<u>*Resolución*</u>*:*

a) El resorte único equivalente de los dos en paralelo tendría una constante:



$K_p = K_1 + K_2 = 150 + 180 = 330\ N.m^{-1}$

se alargaría:

$\Delta l_p = \Delta l_1 = \Delta l_2 = F / K_p = 2\ .\ 9{,}8 / 330 = 0{,}0594\ m = \underline{\mathbf{5{,}94}}\ cm$

b) $K_p = \underline{\mathbf{330}}\ N.m^{-1}$

c) $U = ½\ K_p\,(\Delta l)^2 = ½\ \ 330\ \ 0{,}0594^2 = \underline{\mathbf{0{,}582}}\ J$

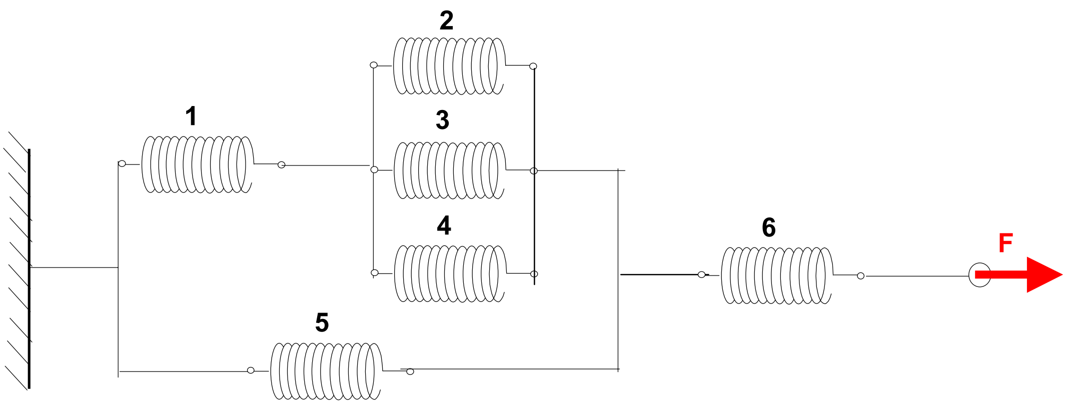
$U_1 = ½\ K_1\,(\Delta l_1)^2 = ½\ \ 150\ \ 0{,}0594^2 = \underline{\mathbf{0{,}264}}\ J$; $U_2 = ½\ K_2\,(\Delta l_2)^2 = ½\ \ 180\ \ 0{,}0594^2 = \underline{\mathbf{0{,}318}}\ J$

Se comprueba que 0,264 + 0,318 = 0,582.

3.- Problema general resuelto.

Los seis resortes de la figura tienen constantes recuperadoras iguales a sus números de orden expresados en centenas de $N.m^{-1}$. Sobre el sistema se ejecuta una fuerza **F** de 100 N. Hállese:

a) La constante recuperadora del resorte equivalente de todos ellos.
b) Los alargamientos producidos en cada uno de ellos, así como las fuerzas a las que están sometidos.
c) Comprobar que la energía potencial del único resorte equivalente de ellos, coincide con las suma de las energías potenciales de cada uno.
d) Si la fuerza **F** deja de accionar cuando el sistema está estirado y se coloca en el extremo derecho una masa de 350 g, ¿ cuánto vale el período de vibración y cuál es la ecuación del movimiento armónico simple realizado ?



Resolución:

a)

Empecemos por obtener las constante recuperadora equivalente de los tres resortes en paralelo, 2, 3 y 4.

$$K_{234} = K_2 + K_3 + K_4 = 200 + 300 + 400 = 900 \text{ N.m}^{-1}.$$

el resorte 1 está acoplado en serie con el 234, luego,

$$K_{1-234} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{K_i}} = \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{900}} = 90 \text{ N.m}^{-1}$$

ahora, el resorte 5 está en paralelo con el 1-234, luego su constante será:

$$K_{1\text{-}234\text{—}5} = K_{1\text{-}234} + K_5 = 90 + 500 = 590 \text{ N.m}^{-1}.$$

por último, éste último está en serie con el 6, así que por fin:

$$K_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{K_i}} = \frac{1}{\frac{1}{K_{1-234--5}} + \frac{1}{K_6}} = \frac{1}{590} + \frac{1}{600} = \frac{35400}{\underline{119}} N.m^{-1} \approx \ \underline{\mathbf{297,479}}\ \text{N.m}^{-1}$$

b)

Tanto el resorte 6 como el equivalente del 1-234—5, están sometidos a la misma fuerza **F** que el equivalente de ellos dos, por estar acoplados en serie, por tanto:

$$\Delta l_6 = \frac{F_6}{K_6} = \frac{F}{K_6} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6} m = \underline{\mathbf{0,167}}\ \text{m.}$$

$\Delta l_{1\text{-}234—5} = \frac{F_{1-234--5}}{K_{1-234--5}} = \frac{F}{K_{1-234--5}} = \frac{100}{590} = \frac{10}{59} m \approx \underline{\mathbf{0,17}}$ m ; de aquí: $\Delta l_{1\text{-}234\text{--}5} = \Delta l_5$, por esta r en paralelo:

Entre 1 y 234 se alargan $\Delta l_{1\text{-}234} = \Delta l_5$ = 10/59 m , por estar en paralelo, con lo cual:

$F_5 = K_5\ \Delta l_5$ = 500 . 10/59 = $\frac{5000}{59} N \approx \underline{\mathbf{84,746}}$ N y $F_{1\text{-}234} = F_{1\text{-}234—5} - F_5$ = 100 – 5000/59 , es decir:

$F_{1\text{-}234}$ = 900/59 m = $F_1 = F_{234}$, por estar en serie así que F_1 = 900/59 m = **15,254** N y

$$\Delta l_1 = \frac{F_1}{K_1} = \frac{900/59}{100} = \frac{9}{59} m \approx \ \underline{\mathbf{0,15254}}\ \text{m}$$

$F_{1\text{-}234} = F_{234}$ = 900/59 N, con lo que $\Delta l_{234} = \dfrac{F_{234}}{K_{234}} = \dfrac{900/59}{900} = \dfrac{1}{59} m \approx \underline{0{,}017} m = \Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_4$, por estar en paralelo.

$F_2 = K_2\ \Delta l_2$ = 200 . 0,017 = **<u>3,4</u>** N ; $F_3 = K_3 . \Delta l_3$ = 300 . 0,017 = **<u>5,1</u>** N ; $F_4 = K_4 . \Delta l_4$ = 400 . 0,017 = **<u>6,8</u>** N

Resumiendo, las fuerzas y alargamientos de los resortes son:

Resorte nº	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Fuerza (N)	**15,25**	**3,4**	**5,1**	**6,8**	**85,75**	**100**
Alargamiento (cm)	**15,25**	**1,7**	**1,7**	**1,7**	**17**	**16,7**

c)

La energía potencial del sistema es $U_{eq} = ½\ K_{eq}\ (\Delta l_{eq})^2 = ½\ F\ \Delta l_{eq} = ½\ F^2 / K_{eq}$

por tanto U = ½ . 100^2 / 297,479 = **<u>16,808</u>** J

si evaluamos las energías potenciales de cada resorte y sumamos:

U = $1/2 \sum_{i=1}^{6} K_i\ (\Delta l_i)^2 = 1/2 \sum_{i=1}^{6} F_i\ \Delta l_i = 1/2 \sum_{i=1}^{6} \frac{F_i^2}{K_i} =$ ½ (100 . $0{,}1525^2$ + 200 . $0{,}017^2$ + 300 . $0{,}017^2$ + 400 . $0{,}017^2$ + 500 . $0{,}17^2$ + 600 . $0{,}167^2$) = **<u>16,81</u>** J, coincidente con el anterior.

d)

Si se suelta el sistema cuando está totalmente estirado, comenzará a vibrar desde la posición de máxima elongación por la derecha, teniendo un ángulo fase inicial de 90º o π/2 rad.

por otra parte el período de oscilación será:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{0,350}{297,479}} = \underline{\mathbf{0,215}}\ \text{s}$$

la ecuación del M.A.S. será $x = A.sen(\omega t + \varphi_0)$, siendo A la amplitud que coincide con la deformación equivalente del sistema : Δl_{eq}.

por tanto, $x = \frac{100}{297,479}\ sen(\frac{2\pi}{0,215}\ t + \frac{\pi}{2}) \quad \Rightarrow$

$$\boxed{x = 0,336\ \ sen(9,3\pi\, t + \frac{\pi}{2})}$$