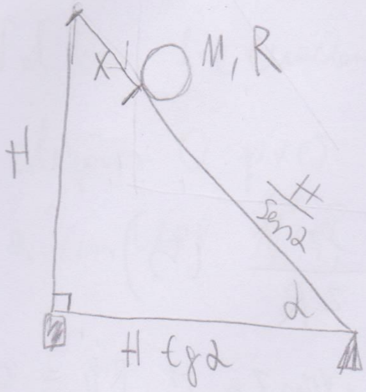
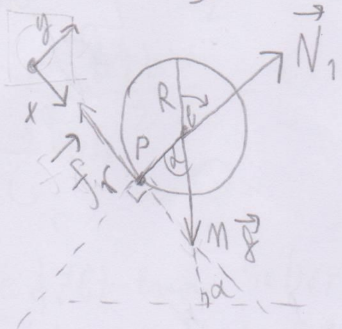
P1



DCL ⊙ (+)



→ Descomponer g respecto a mis ejes:

$$M\vec{g} = Mg\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{bmatrix}$$

→ $\boxed{\sum \vec{F} = M\vec{a}}$

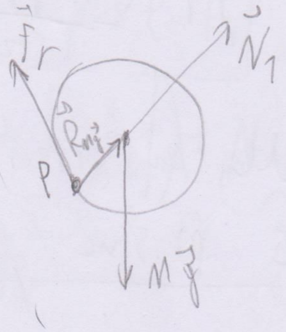
$$\rightarrow \begin{bmatrix}0\\ N_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-F_r\\ 0\end{bmatrix} + Mg\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{bmatrix} = M\begin{bmatrix}a_x\\ a_y\end{bmatrix}$$

→ $a_y = 0$, pues el aro solo se mueve en x

$y: \rightarrow \boxed{N_1 = Mg\cos\alpha}$ (1)

$x: \rightarrow Mg\sin\alpha - F_r = M a_x$ (2)

→ evaluamos torque respecto a P:



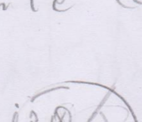
$$\sum \vec{\tau} = \dot{\vec{L}}_P \rightarrow \underbrace{\vec{R}_{M\vec{g}}}_{\begin{bmatrix}0\\ R\end{bmatrix}} \times \underbrace{M\vec{g}}_{Mg\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{bmatrix}} + \underbrace{\vec{R}_{\vec{F}_r}}_{0} \times \vec{F}_r + \underbrace{\vec{R}_{\vec{N}_1}}_{0} \times \vec{N}_1 = \dot{\vec{L}}_p$$

$$\rightarrow \dot{\vec{L}}_p = Mg\begin{bmatrix}0\\ R\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\sin\alpha\\ -\cos\alpha\end{bmatrix} = Mg\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & R & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\end{vmatrix} = Mg\begin{bmatrix}0\\ 0\\ -R\sin\alpha\end{bmatrix} = -MgR\sin\alpha\,\hat{k} \quad (3)$$

→ Observación importante: $\dot{\vec{L}}_p = \dot{\vec{w}} I_p \neq \ddot{\theta} I_p \hat{k}$

¿Por qué? θ está definido negativamente (crece en ↻)

→ Veamos el signo de $\dot{\theta}\hat{k}$



→ Si $\dot{\theta} > 0$, apunta hacia la hoja, pero está rotando positivamente → $\vec{w}$ sale de la hoja

→ Como $\|\vec{w}\| = |\dot{\theta}|$, entonces $\vec{w} = -\dot{\theta}\hat{k}$

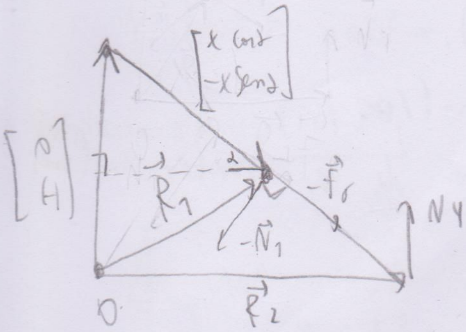
$$\vec{L}_p = \vec{w} I_p = -\dot{\theta} I_p \hat{k} \rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_p = -\ddot{\theta} I_p \hat{k}} \quad (4)$$

$\rightarrow N_3 - Mg\cos\alpha\sin\alpha + \frac{Mg\sin\alpha\cos\alpha}{2} = 0 \rightarrow \boxed{N_3 = \frac{Mg\cos\alpha\sin\alpha}{2} = \frac{Mg\sin(2\alpha)}{4}}$

$\rightarrow N_2 + N_4 - Mg\cos^2\alpha - \frac{Mg\sin^2\alpha}{2} = 0 \quad (7)$

falta 1 ecuación: $\vec{\tau}^{\,neto}_{O} = 0$

→ elegimos O pues no queremos saber nada de $\vec{N}_3$, y si logramos encontrar $\vec{N}_4$, tampoco de $\vec{N}_2$.



$$\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} x\cos\alpha \\ H - x\sin\alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{R}_2 = \begin{bmatrix} H/\tan\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

así, $\vec{\tau}^{\,neto} = \vec{\tau}_{-\vec{N}_1} + \cancel{\vec{\tau}_{N_2}}^{\,0} + \cancel{\vec{\tau}_{N_3}}^{\,0} + \vec{\tau}_{N_4} + \vec{\tau}_{F_r}$

$$= \vec{R}_1 \times (-\vec{N}_1) + \vec{R}_2 \times \vec{N}_4 + \vec{R}_1 \times (-\vec{F}_r)$$

$$= \begin{bmatrix} x\cos\alpha \\ H - x\sin\alpha \end{bmatrix} \times \left(\underbrace{Mg\cos\alpha \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}} + \underbrace{\frac{Mg\sin\alpha}{2} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{bmatrix}}_{-\vec{F}_r} \right) + \underbrace{N_4 H/\tan\alpha\,\hat{k}}_{\vec{\tau}_{\vec{N}_4}}$$

$$= Mg \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x\cos\alpha & H - x\sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2} & -\cos^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{2} & 0 \end{vmatrix} + \frac{N_4 H}{\tan\alpha}\hat{k}$$

$$= Mg\left(-x\cos\alpha\left(\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{2}\right) + (H - x\sin\alpha)\left(+\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right)\right)\hat{k} + \frac{N_4 H}{\tan\alpha}\hat{k}$$

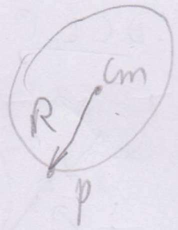
$$= Mg\left(-x\cos^3\alpha - x\frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{2} + \frac{H\sin\alpha\cos\alpha}{2} - \frac{x\sin^2\alpha\cos\alpha}{2}\right)\hat{k} + \frac{N_4 H}{\tan\alpha}\hat{k} = 0$$

$$= Mg\left(-x\cos^3\alpha - x\cos\alpha\sin^2\alpha + H\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right)\hat{k} + \frac{N_4 H}{\tan\alpha}\hat{k} = 0$$

$$\rightarrow N_4 = Mg\left(x\cos\alpha\cos^2\alpha + x\cos\alpha\sin^2\alpha - \frac{H\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\tan\alpha}{H}$$

$$= Mg\left(x\cos\alpha - \frac{H\sin\alpha\cos\alpha}{2}\right) \cdot \frac{\sin\alpha}{H\cos\alpha} = \boxed{Mg\left(\frac{x}{H}\sin\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)}$$

(4) → (3) → $-Mg R\,\text{Sen}\,\alpha\,\hat{k} = -\ddot{\theta}\, I_p\, \hat{k}$



Como $I_{cm} = MR^2$, por steiner

$$I_p = I_{cm} + MR^2 = 2MR^2$$

$$\therefore\ +\ddot{\theta}\cdot 2MR^2\,\hat{k} = +Mg R\,\text{Sen}\,\alpha\,\hat{k} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g\,\text{Sen}\,\alpha}{2R} \quad (5)$$

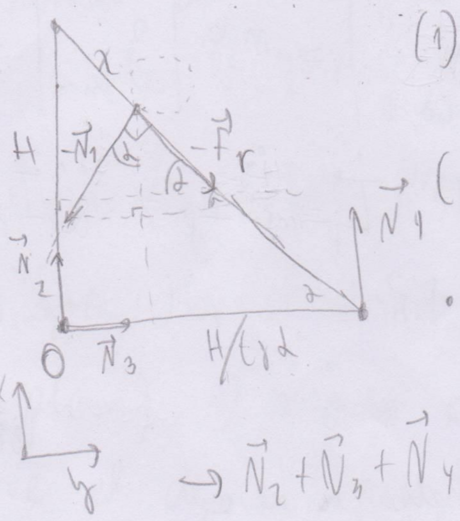
→ Condición de rodadura: si θ aumenta, el aro avanza → $R\ddot{\theta} = a_x$

$$(2) \rightarrow Mg\,\text{Sen}\,\alpha - f_r = MR\ddot{\theta} \underset{(5)}{=} M\cancel{R}\,\frac{g\,\text{Sen}\,\alpha}{2\cancel{R}} = \frac{Mg\,\text{Sen}\,\alpha}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{f}_r = \frac{Mg\,\text{Sen}\,\alpha}{2}(-\hat{i})} \quad (6)$$

• Faltan las fuerzas que ejercen los soportes sobre el prisma

DCL prisma, tomamos x como la distancia recorrida por el aro



- Descomponiendo fuerzas,

$$(1) \rightarrow -\vec{N}_1 = Mg\cos\alpha \begin{bmatrix} -\text{Sen}\,\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$(6) \rightarrow -\vec{f}_r = \frac{Mg\,\text{Sen}\,\alpha}{2} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\text{Sen}\,\alpha \end{bmatrix}$$

• estática: $\sum \vec{F} = 0$

→ la fuerza ejercida por el tope izquierdo se puede descomponer en fuerzas perpendiculares entre sí

$$\rightarrow \vec{N}_2 + \vec{N}_3 + \vec{N}_4 - \vec{N}_1 - \vec{f}_r = 0$$

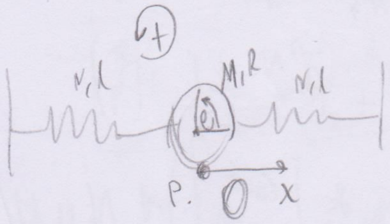
$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ N_4 \end{bmatrix} + Mg\cos\alpha \begin{bmatrix} -\text{Sen}\,\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} + \frac{Mg\,\text{Sen}\,\alpha}{2} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ -\text{Sen}\,\alpha \end{bmatrix} = 0$$

$(7) \rightarrow N_2 = Mg\left(\cos^2\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{2}\right) - Mg\left(\frac{X}{H}\sin\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{2}\right)$

$= Mg\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \frac{X}{H}\sin\alpha\right) = \boxed{\frac{Mg}{H}\left(1 - \frac{X}{H}\sin\alpha\right)}$

P2 V_0 inicial, posición inicial X_0, en el centro.

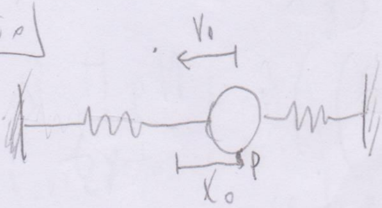
Denotando δ como la elongación de un resorte entonces



$$\delta_{der} = -\delta_{izq} = X$$

Usemos energía, recordemos que $W_{roce} = 0$ para rodadura perfecta, pues en P hay reposo instantáneo. así, evaluamos la energía para el instante inicial.

t_0



$V_0 \rightarrow \omega_0 = \frac{V_0}{R}$

$$E = K_{t_0} + \frac{X_0^2 k}{2} + \frac{(-X_0)^2 k}{2}$$

→ para evaluar K_{t_0}, recordemos que, en torno a P, el movimiento del aro es puramente rotacional. → $K_{t_0} = \frac{I_P \omega_0^2}{2}$, $I_P = \underbrace{MR^2}_{I_0} + \underbrace{MR^2}_{\text{por steiner}} = 2MR^2$

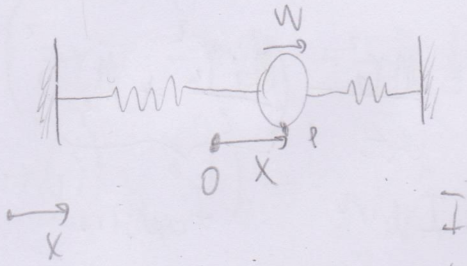
así, $E = \frac{2MR^2}{2}\cdot\frac{V_0^2}{R^2} + X_0^2 k = MV_0^2 + X_0^2 k \quad (1)$

→ en el instante de máxima compresión, se tiene que la velocidad angular y lineal son 0 (primera derivada de la posición). así, sólo los resortes contribuyen a la energía,

$$\to 2\cdot\frac{\delta_{max}^2 K}{2} = E \underset{(1)}{=} MV_0^2 + X_0^2 K \to \boxed{\delta^2_{max} = \frac{MV_0^2}{K} + X_0^2}$$

→ para encontrar $\dot{X}_{max}$, llegaremos a una expresión para $\dot{X}$ y maximizaremos ($\ddot{X}=0$) $\delta_{izq} = X$, $\delta_{der} = -X$

instante arbitrario.



$$E = \frac{I_p W^2}{2} + \frac{\delta_{izq}^2 K}{2} + \frac{\delta_{der}^2 K}{2} \quad (2)$$

$$= M\dot{X}^2 + X^2 K \;\Big/ \frac{d}{dt}$$

$I_p = 2MR^2$

$W = \frac{V}{R} = \frac{\dot{X}}{R}$

$$E = cte \to 0 = 2M\dot{X}\ddot{X} + 2X\dot{X}K, \quad \ddot{X} = 0 \to$$

$$0 = X \cdot \dot{X} \to \underbrace{X = 0}_{\text{tomamos este}} \vee \underbrace{\dot{X} = 0}_{\text{extremo, posición máxima}}$$

imponiendo $X = 0$ en (2), sabremos que tendremos $\dot{X} = \dot{X}_{max}$

$$E \underset{(1)}{=} MV_0^2 + X_0^2 K \underset{\substack{(2)\\ X=0}}{=} M\dot{X}_{max}^2 \to \boxed{\dot{X}_{max}^2 = V_0^2 + X_0^2\frac{K}{M}}$$

P3 | • Sabemos que $M = M' + M_{agujero}$, con $M_{agujero}$ la masa que se quitó al hacer el agujero. Tenemos que

$$M_{agujero} = \rho_{disco} \cdot \pi r_2^2, \text{ y que } \rho_{disco} = \frac{M}{\pi r_1^2} \rightarrow M_{ag.} = \frac{M}{\pi r_1^2}\cdot \pi r_2^2 = M\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \quad (1)$$

$$\rightarrow M' = M - \underbrace{M\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}_{M_{ag.}} = M\left(1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right)$$

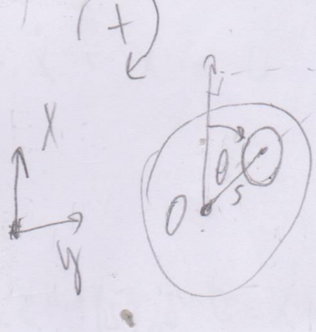
• Recordar: el momento de inercia es una propiedad aditiva, por lo tanto

$$I^0_{pala} + I^0_{agujero} = I^0_{disco} \rightarrow I^0_{pala} = \underbrace{\frac{M r_1^2}{2}}_{I_{disco}} - \underbrace{\left(\frac{M_{ag} r_2^2}{2} + M_{ag}\, s^2\right)}_{I^0_{agujero}\ (\text{Steiner})}$$

Con agujero

$$= \frac{M r_1^2}{2} - M\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\left(\frac{r_2^2}{2} + s^2\right) \quad (2)$$

• Ocurre lo mismo con el centro de masa



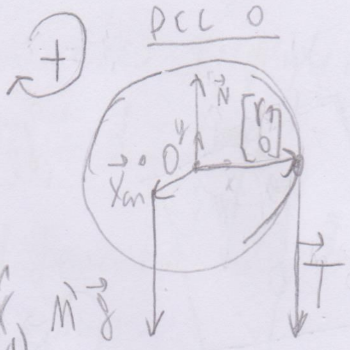
$$\vec{X}^{pala}_{cm} \cdot M' + \underbrace{\vec{X}^{agujero}_{cm}}\ \underbrace{M_{agujero}} = \underbrace{\vec{X}^{disco}_{cm} M}$$

$$\vec{X}^{pala} \cdot M\left(1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right) + \begin{bmatrix} s\sin\theta \\ s\cos\theta \end{bmatrix} M\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \vec{X}^{pala}_{cm}\, \cancel{M}\left(1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right) = -\cancel{M}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 s\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \vec{X}^{pala}_{cm} = -\frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2} s\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \frac{\div\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} \quad \boxed{\frac{1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} s\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}} \quad (3)$$

Necesitamos una expresión para la aceleración angular (ec. de movimiento).

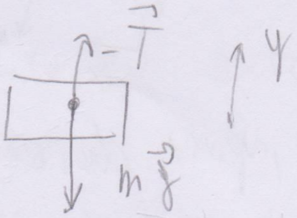


$\boxed{I_0 \equiv I^{0}_{polea}}$

$$\tau^{neto}_0 = \dot{L}_0 = I_0 \alpha$$

$$\vec{X}^0_{cm} \times m\vec{g} + \vec{0} \times \vec{N} + \begin{bmatrix} r_1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ T \end{bmatrix} = I_0 \alpha \hat{k} \quad (4)$$

→ necesitamos T, DCL caja →



$$\to T - mg = m a_y$$

$a_y = -\alpha r_1$ pues si θ aumenta, la caja baja.

$$\to T - mg = -m r_1 \alpha \to T = -m r_1 \alpha + mg \quad (5)$$

$$(5) \text{ y } (4) \to +\vec{X}^0_{cm} \times m'\vec{g} + r_1 \underbrace{(-m r_1 \alpha + mg)}_{(5)} =$$

$$= \frac{S m' g}{1-(r_1/r_2)^2} \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + r_1 (mg - m r_1 \alpha) = \alpha I_0$$

(*) Nota: el (−) se debe al sist. de coord. invertido

$$\to \frac{S m' g}{1-(r_1/r_2)^2} \underset{(*)}{(-)} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} + r_1 m g = \alpha (I_0 + m r_1^2)$$

$$= \frac{S m' g \sin\theta}{1-(r_1/r_2)^2} + r_1 m g = \alpha (I_0 + m r_1^2)$$

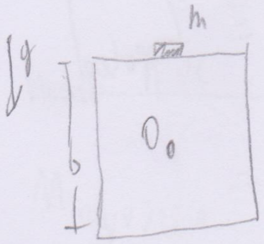
$$\underset{(2)}{=} \alpha \left(\frac{m r_1^2}{2} - m\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \frac{r_2^2}{2} + m\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 S^2 \right)$$

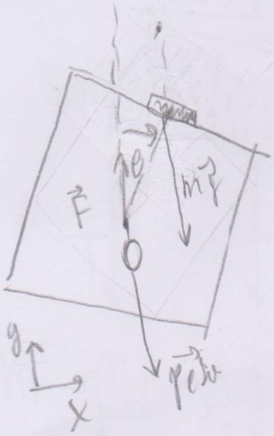
$$\to B = \frac{S m' g}{1-(r_1/r_2)^2} \cdot \frac{1}{m r_1^2/2 - m(r_2/r_1)^2 r_2^2/2 + m\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 S^2}$$

→ (verificar) $$S^2 + S\frac{g}{B} + \frac{r_1^4 - r_2^4}{2 r_2^2} = 0 \to S = \frac{-\frac{g}{B} + \sqrt{\left(\frac{g}{B}\right)^2 - \frac{2(r_1^4 - r_2^4)}{r_2^2}}}{2}$$

tomamos la sol. con + pues esta es la única positiva!

P4) (+) DCL cubo + moneda





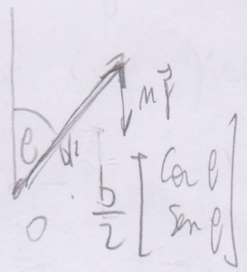
, hagamos la ecuación de torque:

inercia moneda

$$\vec{\tau}^{\,o}_{m\vec{g}} + \underbrace{\vec{\tau}^{\,o}_{\vec{F}}}_{0} + \underbrace{\vec{\tau}^{\,o}_{peso}}_{0} = \left(I + m\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)$$

→ $\dot{L} = I\alpha$, pues ahora θ está definido positivamente en este sistema de referencia elegido.

$$\vec{\tau}^{\,o}_{m\vec{g}} = \frac{b}{2}\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}0 \\ -mg\end{bmatrix} = -\frac{b}{2}\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & -mg & 0\end{vmatrix}$$



$= \frac{b}{2} mg \operatorname{sen}\theta$. El − se debe a que trabajamos con un sentido positivo horario.

Así, $\frac{b}{2} mg \operatorname{sen}\theta = \left(I + m\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)\alpha$, $\alpha = \dfrac{\frac{b}{2} mg \operatorname{sen}\theta}{I + m\left(\frac{b}{2}\right)^2}$

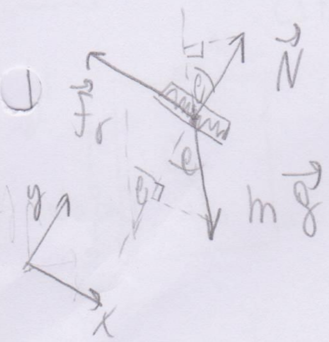
→ Para encontrar ω, usamos energía.

Para el sistema completo, $E_i = mg\frac{b}{2}$, la energía potencial de la moneda. En un momento dado, la energía es $E_f = U_{cuad.} + K_{cuad} + U_{mon} + K_{mon} = 0 + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mgb}{2}\cos\theta + \frac{m(b/2)^2}{2}\omega^2 = mg\frac{b}{2}$

$$\rightarrow \omega^2\left(\frac{I}{2} + \frac{m}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2\right) = mg\frac{b}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{mgb(1 - \cos\theta)}{I + m(b/2)^2}$$

· Hagamos el DCL en la moneda



$$\begin{bmatrix}0\\N\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-f_r\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}mg\sin\theta\\-mg\cos\theta\end{bmatrix}=m\vec{a}_{centripeta}$$

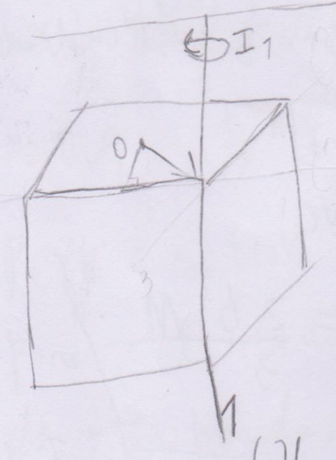
→ $mg\sin\theta = f_r$, pues $\vec{a}_{cent}$ es solo en y, negativa

→ $N - mg\cos\theta = -m\,a_{cent} = -m\omega^2\frac{b}{2}$

→ $N = mg\cos\theta - m\omega^2\frac{b}{2}$, para que se despegue es necesario que $N=0$

→ $N = 0 = mg\cos\theta - m\omega^2\frac{b}{2}$ → $\omega^2 = \frac{2g\cos\theta}{b}$

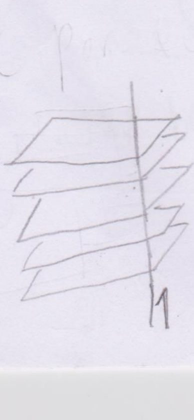
→ $\frac{mgb(1-\cos\theta)}{I+mb^2/4} = \frac{2g\cos\theta}{b}$ → $\boxed{\cos\theta = \frac{mb^2(1-\cos\theta)}{2(I+mb^2/4)}}$



· primero, notamos que por steiner, el momento de inercia con respecto al eje 1 de la figura es $I_1 = I + m\left(\frac{b}{2}\cos(\pi/4)\right)^2$

· Recordemos que para cualquier prisma recto (una figura bidimensional trasladada en un eje perpendicular al plano), el momento de inercia en este eje es el mismo que el de la figura, pero con la masa del prisma. (*)

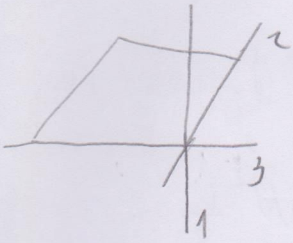
¿por qué?, → el momento de inercia de cada cuadrado es el mismo, pues tienen la misma distribución de masas respecto al eje



→ así, el momento de Inercia total es la suma de todos.

busquemos el momento de inercia de uno de los cuadrados, usando el teorema de los ejes perpendiculares,

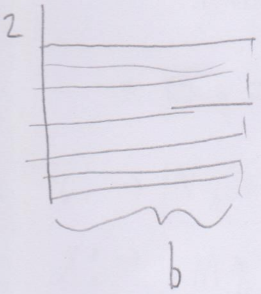
tenemos que $dI_3^{cuad} + dI_2^{cuad} = dI_1^{cuad}$



→ dI^{cuad} simboliza el momento de inercia de cada trozo cuadrado del cubo.

→ por simetría, $dI_3^c = dI_2^c$

→ para encontrar dI_3^c, usamos el mismo argumento que antes



→ el cuadrado se puede descomponer en infinitas barras de largo b, esta vez, cada una tiene momento de inercia $dI = \frac{1}{3}b^2 dm_b$, con dm_b simbolizando la masa de cada barra.

→ podemos usar (*), o demostrarlo para este caso. (no tienen que saber esto)

$$dI_2^c = \sum_{cuadrado}^{\infty} \frac{1}{3} b^2 dm_b = \int_{cuadrado} \frac{1}{3} b^2 dm_b = \frac{1}{3} b^2 \int_{cuadrado} dm_b = \frac{1}{3} b^2 dm_{cuadrado}$$

así, $dI_1^c = 2dI_2^c = \frac{2}{3} b^2 dm_c$, por lo que

$$I_1 = \int_{cubo} dI_1^c = \int_{cubo} \frac{2}{3} b^2 dm_c = \frac{2}{3} b^2 \int_{cubo} dm_c = \boxed{\frac{2b^2M}{3}}$$

$$\therefore I = I_1 - m\left(\frac{b}{2}\cos(\pi/4)\right)^2 = \frac{2b^2M}{3} - m\left(\frac{b}{2}\underbrace{\cos(\pi/4)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)^2$$

$$= \boxed{\frac{2b^2M}{3} - \frac{mb^2}{8}}$$

→ la idea, es que sepan aplicar (*). la "demostración" es para que se entienda el por qué.