Resumen Conceptual

Oscilaciones

Profesor: Vicente Salinas
Auxiliares: César Aguilar Carolina Gutiérrez Miguel Sepúlveda

1. Oscilaciones

1.1. Resumen Teórico

1.1.1. La ecuación

Un **Oscilado armónico** es un sistema que al desplazarse de su posición de equilibrio, experimenta una fuerza restauradora proporcional a este desplazamiento.

La ecuación de un oscilador armónico es de la forma

$$\ddot{\zeta} + \frac{1}{\tau}\dot{\zeta} + \omega_o^2\zeta = f_0\cos(\omega t)$$

donde ζ es alguna cantidad física (Usualmente, la posición o el ángulo del objeto en estudio). Estas ecuaciones surgen cuando se tiene un sistema donde existe una fuerza de restitución proporcional a la variable ζ, es decir, una fuerza que lleva al sistema de vuelta a una posición de equilibrio frente a alguna perturbación externa (i.e. Resorte con una masa que se golpea), una fuerza con acción amortiguadora que se opone al cambio de ζ, y un forzamiento sinusoidal con frecuencia ω **impuesto por algún agente externo**.

Las constantes del sistema, independientes del forzamiento y del impulso inicial, son propias del mismo:

- τ es el tiempo característico, un indicador de que tan lento disminuye la amplitud de la fase transitoria al transcurrir el tiempo, y por ende, de que tan bajo es el amortiguamiento. Decir que $\tau \to \infty$ es equivalente a despreciar el amortiguamiento al que está sujeto el sistema.

- ω_0 Es la frecuencia característica del sistema, con la que este oscilaría este si es que no estuviera sujeto a amortiguamiento ni forzamiento externo.

1.1.2. La solución

La solución a la ecuación de un oscilador es de la forma

$$\zeta(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}}\cos(\Omega_0 t + \phi_0) + B(\omega)\cos(\omega t + \delta)$$

Donde

$$B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}$$

es la amplitud de la fase estacionaria, f_0 es la amplitud del forzamiento (La cual es 0 si no hay), y

$$\delta = tan^{-1} \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

es el desfase de la fase estacionaria con respecto al forzamiento.

1.1.3. Las dos fases

La ecuación anterior nos dice que el sistema oscilará con una superposición de dos oscilaciones con frecuencias, amplitudes, y desfases que no son necesariamente iguales, representadas por los dos términos en la ecuación.

El término de la izquierda es la **fase transitoria**. Esta es la respuesta (Completamente independiente del forzamiento) al impulso inicial que se le da al sistema, por lo que las constantes A, y ϕ son determinadas por las condiciones iniciales del sistema. La **amplitud** de esta fase es el término que acompaña a la función trigonométrica $A(t) = Ae^{\frac{-t}{2\tau}}$, esta disminuye de manera exponencial con el tiempo, volviéndose nula con $t \to \infty$.

El término de la derecha es la **fase estacionaria**. Esta es la respuesta (Completamente independiente del impulso inicial) al forzamiento impuesto sobre el sistema, por lo que sus constantes B y δ son determinadas por la relación entre el forzamiento y las características del sistema.

La amplitud de esta fase $B(\omega)$ es **invariante en el tiempo**, y únicamente dependiente del forzamiento impuesto por el agente externo. Por esto es que se dice que eventualmente el sistema se rinde frente al forzamiento, pues esta fase tiene la misma frecuencia del forzamiento.

- Si $\omega \to 0$, entonces tenemos un forzamiento que es muy lento, en el cual el sistema se mueve junto con el forzamiento con amplitud $\dfrac{f_0}{\omega_0^2}$, y sin desfase.
- Si $\omega \approx \omega_0$, el sistema entra en resonancia, donde la amplitud se maximiza, solamente limitada por el valor de τ, y con un desfase de $\pi/2$.
- Si $\omega \to \infty$, entonces la oscilación es tan rápida que el sistema no tiene tiempo para responder, por lo que la amplitud de la oscilación tiende a 0, y se está completamente desfasado, con $\delta = \pi$.

Notese también que la frecuencia de esta fase es igual a la del forzamiento, por lo que se dice que eventualmente, el sistema siempre oscila con la frecuencia de forzamiento, solo que no necesariamente con la misma fase, o con la misma amplitud.

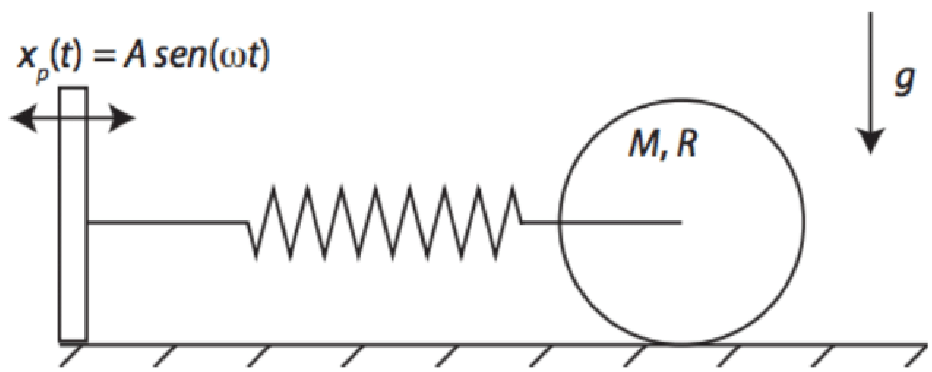
Nota: Casi todos los problemas requieren primero llegar a la ecuación diferencial. Si usted entiende bien los conceptos recién expuestos, esto es lo más difícil de las preguntas, pues requiere que usted entienda y aplique conceptos de casi todas las demás unidades del curso.

1.2. Ejemplo

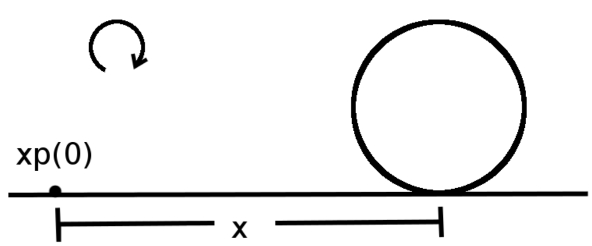
A continuación se dará a modo de ejemplo la resolución de la pregunta 2 del control 2 de este semestre:

Tenemos un disco de radio R y de masa M distribuida uniformemente, que rueda sin resbalar sobre una superficie rugosa. e un resorte de constante elástica k y largo natural l_0. El otro extremo del resorte esta unido a un pistón que realiza un movimiento oscilatorio, dado por $x_p(t) = A\sin(\omega t)$. El sistema se encuentra sumergido en un fluido viscoso, de manera que el disco siente una fuerza de roce viscoso dado por $F_{rv} = -b\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad de su centro de masa con respecto a la superficie.

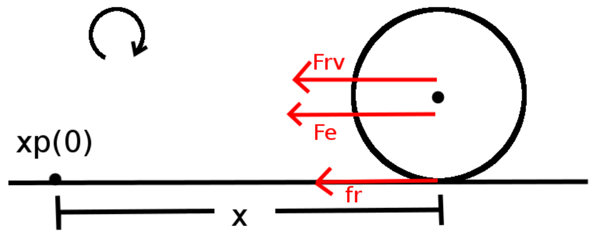
- Escriba la ecuación de movimiento del disco.
- Escriba la expresión de la trayectoria del centro de masa para tiempos largos.
- Bosqueje la amplitud de estas oscilaciones en función de ω. Explique cualitativamente su bosquejo.



Solución: Primero, debemos establecer un sistema de referencias consistente que no lleve a ambigüedades. En este caso, tomemos el siguiente:



Leyendo el enunciado, podemos identificar tres fuerzas: La fuerza elástica F_e, la fuerza de roce viscoso F_{rv}, y como el disco esta rodando sin resbalar, debe haber una fuerza de roce con el piso, f_r, apuntando en la dirección contraria al movimiento. Una vez tenemos las fuerzas identificadas y un sistema de referencia establecido, podemos hacer el DCL del disco:



Nota 1: Un buen consejo para hacer DCLs de fuerzas cuya dirección depende de la posición/velocidad, es hacerlo cuando x y $\dot{x}$ son positivas. Así, los signos que se obtengan del DCL serán consistentes.

Nota 2: Es importantísisisimo entender el rol de la fuerza de roce en rodadura. Esta hace el torque necesario para que el disco gire en torno a su centro de manera tal que se cumpla la condición de rodadura. **NO** es igual al coeficiente de roce por la normal. Ahora podemos encontrar una expresión mas explícita para dos de las tres fuerzas:

- El roce viscoso como en el va a la izquierda, es $-b\dot{x}$.
- Sabemos que la fuerza elástica depende de la diferencia entre el largo actual de este y el largo natural, es decir, de $l - l_0$. Pero l es la diferencia entre x y x_p, en el sistema de referencias que elegimos. Así, la fuerza elástica es $-k(x - x_p - l_0)$. El menos va por que si $l > l_0$, entonces el resorte tira a la izquierda.

Nota 3: Es importante reconocer de donde viene el forzamiento, pues la mayoría de las veces no es una fuerza directa sobre el sistema. Sabemos que debe aparecer de alguna manera en la fuerza elástica, por lo que debemos asegurarnos de que este sea el caso.

Ahora podemos proceder de 2 maneras, cada una da información suficiente para encontrar la ecuación de movimiento. Independiente de como se haga, la ecuación de torque nos da información sobre ángulos, y necesitamos información sobre posición. Esto se soluciona imponiendo la condición de rodadura.

Nota 4: Para hacer la ecuación de torque, es importante definir el ángulo θ que se usará. Si este crece en sentido negativo, entonces al crecer, el disco retrocede, por lo que la condición de rodadura queda $x = -R\theta$, pero para la ecuación de torque habrá que considerar que $\sum \vec{\tau_c} = -I_c\ddot{\theta}$, con c el punto que elegimos para la ecuación de torque. Si θ crece en sentido positivo, entonces estos signos se invertirán. Un sistema de referencias, y variables consistentes le ahorrará mucho tiempo y será de gran ayuda.

Considerando esto, elija una de estos métodos y verifique el resultado que se presenta después.

- Hacer la ecuación de movimiento, y luego la ecuación de torque con centro en el centro del disco.
- Hacer la ecuación de torque en el punto de contacto p entre el disco y el suelo.

Se obtiene entonces la ecuación de movimiento del sistema:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{2b}{3M}\dot{x} + \frac{2k}{3M}x = \frac{2k}{3M}A\sin(\omega t) - \frac{2k}{3M}l_0} \tag{1}$$

Lo agrupamos de esta manera pues queremos que tenga la forma de la ecuación diferencial de un oscilador forzado. Pero estamos frente a un problema, pues hay una constante que no nos permite aplicar directamente la solución. Esto siempre ocurre cuando no definimos nuestra variable como la desviación de la posición de equilibrio. Lo que haremos entonces es encontrar el equilibrio, y luego definir una nueva variable que representará esta desviación.

Para encontrar la posición de equilibrio x_{eq}, ignoramos el forzamiento, y aplicamos las condiciones de estática ($\ddot{x_{eq}} = \dot{x_{eq}} = 0$) en la ecuación de movimiento. Al despejar x_{eq} de esta expresión, se obtiene $x_{eq} = l_0$. Esto también se podía encontrar fácilmente al recordar que si el largo del resorte es igual a su largo natural, y al no haber ninguna otra fuerza presenta (como el viento por ejemplo), entonces el sistema está estático.

Entonces, basta con hacer el cambio de variable $\bar{x} = x - x_{eq}$ (La desviación del equilibrio), y la constante que estaba molestando se irá (Lo puede verificar usted mismo/a). La nueva ecuación será entonces:

$$\ddot{\bar{x}} + \frac{2b}{3M}\dot{\bar{x}} + \frac{2k}{3M}\bar{x} = \frac{2k}{3M}A\sin(\omega t) \tag{2}$$

Nota 5: Esto siempre funciona, cuando hay una constante que sobra. Esto ocurre por que las constantes evidencian De donde podemos obtener las constantes mas importantes asociadas a la oscilación (Nunca olvide hacer esto):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$
$$\tau = \frac{3M}{2b}$$
$$f_0 = \omega_o^2 A$$

Como necesitamos el desplazamiento para tiempos largos, entonces la fase transiente se desprecia, por lo que las condiciones iniciales no importan. Finalmente podemos escribir la expresión que describe la posición del centro de masas del disco en función del tiempo.

$$\bar{x}(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \delta), \quad B(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}}$$

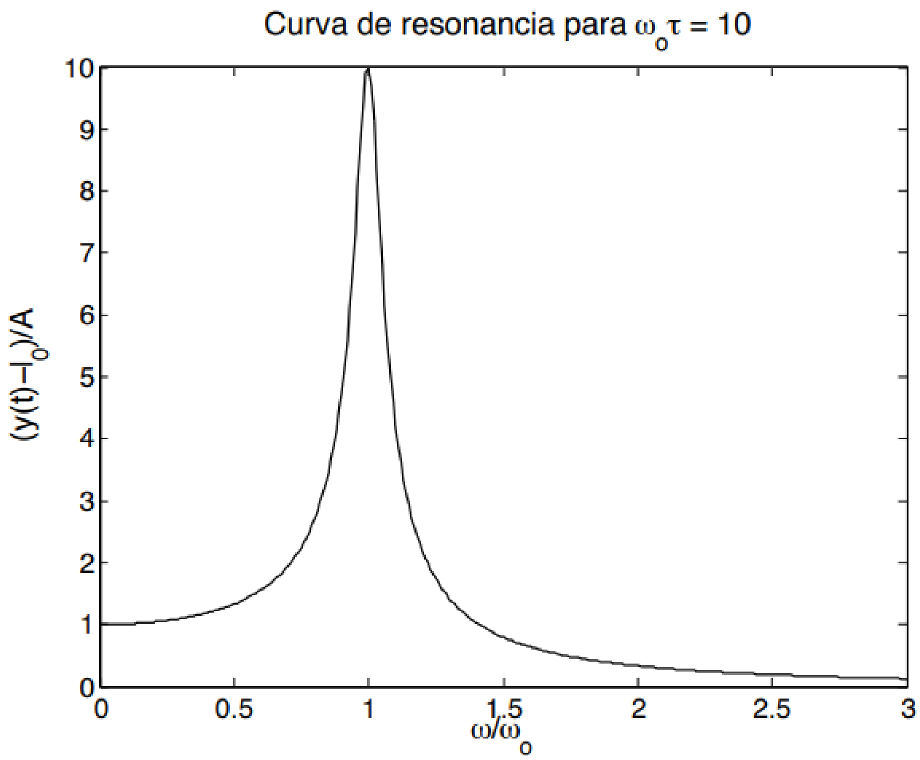
Revirtiendo el cambio de variables:

$$\boxed{x(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \delta) + l_0}$$

Finalmente, para hacer el bosquejo de $B(\omega)$ v/s ω, debemos tomar valores de ω donde sabemos como se comportará el sistema:

- $\omega \to 0 \Rightarrow B(\omega) = \dfrac{f_0}{w_0^2} = A$
- $\omega = \omega_0 \Rightarrow B(\omega)$ es máximo.
- $\omega \to \infty \Rightarrow B(\omega) \to 0$

Así, obtenemos el siguiente gráfico:


Curva de resonancia para $\omega_o\tau = 10$
$(y(t)-l_0)/A$
ω/ω_o
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10