Pauta Auxiliar 0

Matemáticas

FI2002-6: Electromagnetismo
4 de agosto de 2017

Profesor: Francisco Brieva
Auxiliares: Manuel Morales, Nicolás Valdés

P1. (a) **Introducción.** f es un campo escalar; esto significa que a cada punto del espacio, f le asocia un número (un escalar). Un ejemplo de esto es la temperatura en una pieza; a cada punto en el espacio, le corresponde una temperatura[1]. El gradiente de f, ∇f, habla sobre la pendiente de f en la dirección de máximo cambio del campo (y es un vector, teniendo tanto magnitud como dirección). En cuanto al Laplaciano $\nabla^2 f$, también de alguna manera cuantifica el cambio de f (mejor dicho, la divergencia del cambio de f).

Resolución. Ahora, a calcular lo pedido. Recuerdo: en coordenadas cartesianas,

$$\nabla f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{2}$$

Aquí $f(\vec{r}) = \sin(2y)e^{xz}$, y sólo hay que calcular las derivadas parciales con respecto a cada coordenada. Encontramos que

$$\boxed{\nabla f = \left(z\sin(2y)e^{xz}\right)\hat{x} + \left(2\cos(2y)e^{xz}\right)\hat{y} + \left(x\sin(2y)e^{xz}\right)\hat{z}} \tag{3}$$

En cuanto al Laplaciano (tomando las segundas derivadas y sumando),

$$\boxed{\nabla^2 f = \sin(2y)e^{xz}\left(z^2 + x^2 - 4\right)} \tag{4}$$

(b) **Introducción.** La idea de este problema es familiarizarlos con la idea de *divergencia* y *rotor* de campos vectoriales. Los campos vectoriales son parecidos a los escalares; la diferencia es que a cada punto se le asocia un vector en vez de un número (por ejemplo, la velocidad de cada partícula de aire en cada punto). Intuitivamente, la divergencia nos indica cuánto está “expandiéndose/abriéndose” un campo vectorial. El rotor nos indica cuánto esta “rotando”. Nota: el rotor de un campo vectorial nos entrega otro campo vectorial (es como un producto cruz entre dos vectores–nos da otro vector). La divergencia nos entrega un campo escalar (es como hacer un producto punto). ¿Qué tipo de campo nos entrega el gradiente?

Resolución. El primer campo vectorial es $\vec{v}(\vec{r}) = \left(x^2 + y^2\right)\hat{\rho} = \rho^2\hat{\rho}$. Dibujen el campo! (Si quieren usen líneas de campo, o dibujen vectores en algunos puntos.) Es un ejercicio útil; pregunten en el foro si tienen dudas sobre esto.

Dado que $\vec{v}$ apunta sólo en $\hat{\rho}$, será conveniente trabajar con coordenadas cilíndricas. Anotemos primero todas sus componentes: $v_\rho = \rho^2$, $v_\phi = 0$, $v_z = 0$.

Estos están en el formulario, pero los pongo aquí en todo caso. La divergencia y el rotor de un campo $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas son:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{5}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{k} \tag{6}$$

[1] No es *tan* así, pero asumamos que podemos definir la temperatura en cada punto :D

Entonces, reemplazando las componentes de $\vec{v}$ que anotamos antes, podemos rápidamente calcular tanto la divergencia como el rotor de $\vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho^3)}{\partial \rho} + 0 + 0 = \boxed{3\rho} \tag{7}$$

$$\nabla \times \vec{v} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(0)}{\partial \phi} - \frac{\partial(0)}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial \rho^2}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(0)}{\partial \rho} - \frac{\partial \rho^2}{\partial \phi}\right)\hat{k} = \boxed{0} \tag{8}$$

Este primer campo, entonces, parece expandirse (tiene divergencia positiva), pero no rota. Revisen su dibujo para ver si calza con esta idea.
Ahora el segundo campo: $\vec{B}(\vec{r}) = -y\hat{x} + x\hat{y}$. La divergencia y el rotor en cartesianas son:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{9}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z} \tag{10}$$

Tomando en cuenta que $B_x = -y$, $B_y = x$, $B_z = 0$, chantamos estas componentes en las ecuaciones de arriba para encontrar:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial(x)}{\partial y} + 0 = \boxed{0} \tag{11}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial(-y)}{\partial z} - \frac{\partial(0)}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)\hat{z} = \boxed{2\hat{z}} \tag{12}$$

Este segundo campo parece rotar, pero no tener una "expansión" hacia afuera.
Ahora, el último campo: $\vec{E}(\vec{r}) = \hat{r}/r^2$. Dada la presencia del $\hat{r}$, parece ser conveniente usar coordenadas esféricas. Notamos que $E_r = 1/r^2$, $E_\theta = 0$, $E_\phi = 0$. No voy a anotar el corcho de rotor y divergencia en estas coordenadas aquí; por favor revisen el formulario, y verifiquen que aplicando las ecuaciones, tenemos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \boxed{0} \tag{13}$$

$$\nabla \times \vec{E} = \boxed{0} \tag{14}$$

(La forma de llegar a esto es muy parecida a lo que hicimos para los otros campos.) Algo raro: este campo tiene un dibujo que debería tener divergencia no nula. Veremos más adelante que en realidad no es cero su divergencia.

No tiene sentido calcular el gradiente de estos campos, ya que el gradiente es una operación que se hace sobre campos escalares; no se puede aplicar para campos vectoriales. Si tenemos un vector $\vec{a}$ y otro vector $\vec{b}$, podemos calcular $\vec{a} \times \vec{b}$, y $\vec{a} \cdot \vec{b}$, pero la expresión $\vec{a}\vec{b}$ no tiene sentido. De manera análoga, no tiene sentido calcular la divergencia o el rotor de un campo escalar.

Nota: hay algunas identidades útiles del operador ∇. Por ejemplo, $\nabla \times (\nabla f) = 0$ para cualquier campo f. Esto es importante porque como veremos, el campo electrostático se puede escribir como el gradiente de un potencial; dado esto, sabemos que su rotor será cero. Hay otras identidades bacanes en la sección 5.2 del formulario.

P2. (a) **Introducción.** Una integral de línea de un campo vectorial hace lo siguiente: tenemos un camino (una curva en el espacio), y "caminamos/avanzamos" a lo largo de éste. A medida que avanzamos, tomamos el producto punto de un diferencial de largo del camino en el punto donde estamos parados, con el vector que está en ese punto: $\vec{F} \cdot d\vec{l}$, donde el diferencial de largo apunta en la dirección que va avanzando el camino. La integral de línea hace una suma de todos estos trozos chicos de producto punto del campo vectorial, con distintas partes del camino. Se escribe así:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{15}$$

Cuando el camino es cerrado (vuelve al mismo punto donde comenzó) típicamente escribimos

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{16}$$

Algo importante en esta integral es la parametrización del camino. Veremos esto en la resolución.

Resolución. Tenemos el campo vectorial $\vec{H}(\vec{r}) = \alpha\vec{r}$, y los puntos extremos $(0,0)$, (α,α). Hay que evaluar dos integrales de línea (porque nos piden dos caminos distintos). El primer camino, llamémoslo Γ_1, va a lo largo del eje x y luego el eje y. Será conveniente separar la integral en dos partes:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{(0,0)}^{(\alpha,0)} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{(\alpha,0)}^{(\alpha,\alpha)} \vec{H} \cdot d\vec{l} \tag{17}$$

En cada integral notamos cada coordenada del punto de partida, y el punto final. En la primera integral, sólo nos movemos a lo largo del eje x, por lo que a través de todo el camino tendremos $d\vec{l} = dx\hat{x}$. Además, $\vec{H} = \alpha\vec{r} = \alpha(x\hat{x} + y\hat{y})$. Entonces, $\vec{H} \cdot d\vec{l} = \alpha x dx$ para la primera integral. De manera análoga, para la segunda integral llegamos a que $\vec{H} \cdot d\vec{l} = \alpha y dy$.

$$\int_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{(0,0)}^{(\alpha,0)} \alpha x dx + \int_{(\alpha,0)}^{(\alpha,\alpha)} \alpha y dy = \frac{\alpha}{2}\left(x^2\Big|_{(0,0)}^{(\alpha,0)} + y^2\Big|_{(\alpha,0)}^{(\alpha,\alpha)} \right) \tag{18}$$

Es importante tener en cuenta tanto la coordenada x como y al evaluar estos límites (aunque en este caso específico no hace diferencia). Tenemos finalmente que

$$\boxed{\int_{\Gamma_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \alpha^3} \tag{19}$$

Ahora evaluemos la otra integral, a lo largo de Γ_2, donde tomamos un camino radial directamente desde $(0,0)$ hasta (α,α). Esta integral la voy a evaluar de dos maneras. Primera forma: usemos coordenadas polares. Dado que el camino es radial, el diferencial de línea será $d\vec{l} = \hat{r}dr$. Entonces,

$$\int_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{(0,0)}^{(\alpha,\alpha)} \alpha r dr = \frac{\alpha}{2} r^2\Big|_{(0,0)}^{(\alpha,\alpha)} \tag{20}$$

Falta preguntarnos: ¿qué valores toma r en el límite superior y el inferior? Sólo hay que recordar que en coordenadas polares, $r^2 = x^2 + y^2$. Entonces, el límite inferior será $r = 0$, mientras que el límite superior será $r = \alpha\sqrt{2}$ (dado que aquí tenemos $x = y = \alpha$). Reemplazando esto en lo que teníamos arriba, llegamos a que

$$\boxed{\int_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \alpha^3} \tag{21}$$

Una segunda forma de hacer esto es continuar usando coordenadas cartesianas. Tenemos que $d\vec{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy$. Aquí es donde entra una parte importante sobre el camino que tomamos. Estamos considerando una línea recta que va desde $(0,0)$ hasta (α,α). Entonces podemos decir que este camino pertenece a la línea $y=x$.

Esto es lo fundamental sobre integrales de línea. Hay que parametrizar el camino que tomamos de alguna manera; aquí lo estamos haciendo relacionando las coordenadas x e y. Al principio separamos el camino en dos para poder usar de manera separada el parámetro x, y luego el parámetro y. Después usamos el parámetro r a lo largo del camino. Ahora podemos elegir x o y, no importa. Elegimos y porque sí.

Dado que $x=y$, tenemos también que $dx=dy$. Por lo tanto, $d\vec{l}=(\hat{x}+\hat{y})dy$. Además, tendremos que $\vec{H}=\alpha\vec{r}=\alpha(x\hat{x}+y\hat{y})=\alpha y(\hat{x}+\hat{y})$. Tomando el producto punto, vemos

$$\vec{H}\cdot d\vec{l}=\alpha y(\hat{x}+\hat{y})\cdot(\hat{x}+\hat{y})dy=2\alpha y dy \tag{22}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\Gamma_2}\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_{(0,0)}^{(\alpha,\alpha)}2\alpha y dy=\alpha^3 \tag{23}$$

Como era de esperar. **Importante:** Esta última integral, y la que hicimos antes usando r, necesariamente tenían que dar el mismo resultado. El valor de la integral de línea no depende de la parametrización que usemos. Ahora, que la integral a lo largo de Γ_1 haya sido igual a la que tomó Γ_2 es algo más especial. Esto no ocurre en todos los casos. Ocurre siempre cuando un campo vectorial es *conservativo*, y puede o no ocurrir para campos no conservativos. Ahora que ojalá saben como usar la integral de línea, les doy la definición más precisa xD (creo que muchas veces es más fácil aprender a usar algo, y luego ver la definición para entenderlo desde un punto de vista más ordenado). Si parametrizamos un camino Γ por el parámetro t, y al principio del camino $t=T_1$, mientras que al final, $t=T_2$, la integral de línea de un campo $\vec{F}$ a lo largo de Γ será

$$\int_{\Gamma}\vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=\int_{T_1}^{T_2}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt \tag{24}$$

Ahí se ve que entre el parámetro t y las coordenadas (escondidas en $\vec{r}$) tenemos que encontrar alguna relación para poder calcular la integral. En nuestros casos fue fácil; siempre pudimos usar una coordenada como el parámetro. Intenten usar esta definición para calcular la integral de línea a lo largo de Γ_1.

(b) **Introducción.** Las integrales de flujo miden lo que dice el nombre: cuánto de algo (en concreto, un campo vectorial), está fluyendo a través de una superficie. Si tenemos una superficie $\mathcal{S}$, la integral de flujo de un campo $\vec{F}(\vec{r})$ a través de $\mathcal{S}$ se anota

$$\iint_{\mathcal{S}}\vec{F}\cdot d\vec{a} \tag{25}$$

La construcción de esta integral hace lo siguiente: tomamos una superficie, y la subdividimos en pedazos pequeños, aproximadamente planos y de área da. A cada pedacito le asociamos un vector normal $\hat{n}$ (esto se puede hacer porque son planos los pedazos). Entonces decimos que cada pedazo tiene vector de área $d\vec{a}=\hat{n}da$. Ahora, en cada pedacito tomamos el producto punto entre el campo vectorial $\vec{F}$ evaluado en ese punto, con $d\vec{a}$. La suma de todas estas contribuciones nos da la integral. Una pregunta: ¿qué dirección le asociamos a $\hat{n}$? Tenemos dos opciones de normal para una superficie (hacia "arriba" o hacia "abajo"). La elección es por convención nomás; uno decide y lo tiene que recordar al hacer los cálculos.

Cuando la superficie es cerrada, la convención es elegir que el vector normal apunte desde adentro de la superficie, hacia afuera. Además, anotamos la integral como

$$\oiint_{\mathcal{S}}\vec{F}\cdot d\vec{a} \tag{26}$$

Cuando la superficie es cerrada, tenemos la convención de que la normal $\hat{n}$ apunta hacia fuera de la superficie (esta noción sí está definida para superficies cerradas, a diferencia del caso anterior no cerrado).

Resolución. Tenemos el campo

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{27}$$

Y queremos evaluar su integral de flujo sobre una esfera de radio R centrada en el origen. Lo conveniente en este problema es que para cualquier pedacito de superficie sobre la esfera, el vector normal apuntará en la dirección $\hat{r}$ (en coordenadas esféricas). Por esta simetría esférica trabajaremos con coordenadas esféricas. En este sistema de coordenadas, el elemento de superficie está dado por $da = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$. Para la esfera $r = R$ constante. Además, el campo $\vec{E}$ evaluado en cualquier parte de la superficie tomará el valor $\hat{r}/R^2$. Entonces tenemos:

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\hat{r}}{R^2} \cdot \hat{r} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta d\phi \tag{28}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi} d\phi = \boxed{4\pi} \tag{29}$$

P3. Introducción. Hay dos teoremas fundamentales en el cálculo vectorial.

Teorema de Stokes:

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{a} = \oint_{\partial \mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{l} \tag{30}$$

Teorema de Gauss:

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{F}) dV = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \vec{F} \cdot d\vec{a} \tag{31}$$

Ambos, de alguna manera, relacionan la integral de la derivada de un campo, con el campo evaluado en los bordes del dominio de integración. Vamos a ver todo esto en harto detalle en CAA.

Resolución.

(a) Propuesto. Si quieren lo podemos hablar en persona, o si tienen dudas pónganlas en el foro! Algo importante: en el teorema de Stokes hay que integrar sobre una superficie. ¿Qué normal elegimos? Porque ahora no es cerrada la superficie, y el sentido que escojamos va a importar. Hay que recordar que vamos a tomar un camino cerrado en el borde de la superficie; la dirección en que tomemos este camino va a determinar la dirección en la cual apunta la normal a la superficie, según la regla de la mano derecha.

(b) Calcular esta integral de flujo sería bien desagradable, entonces vamos a usar el teorema de Gauss. Calculemos la divergencia de $\vec{F}$:

$$\nabla \cdot \vec{F} = 2x \cos(x^2) e^{-xy} - y \sin(x^2) e^{-xy} - 2x \cos(x^2) e^{-xy} + y \sin(x^2) e^{-xy} = \boxed{0} \tag{32}$$

Revisando el teorema de Gauss, vemos que esto implica que la integral de flujo será 0.

(c)

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{E}) dV = \oiint_{\partial \mathcal{V}} \vec{E} \cdot d\vec{a} \tag{33}$$

Encontramos que $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, entonces el lado izquierdo es 0. Además, encontramos que la integral de flujo de $\vec{E}$ sobre una esfera es 4π, entonces el lado derecho es 4π. No está mal el teorema de Gauss... Lo que está mal es el cálculo de $\nabla \cdot \vec{E}$ en la P1. Teníamos la derivada de r^2/r^2, y dijimos que esto era la derivada de 1. Pero r^2/r^2 no podemos decir que es 1 en el origen (ahí no está bien definido). En realidad, $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \delta^3(\vec{r})$. Investiguen sobre la delta de Dirac!

Nota aparte: En la geometría diferencial se desarrolla una versión mucho más general del cálculo vectorial, y tiene aplicaciones en varias partes de la física (popularmente la relatividad general). El teorema de Stokes, de Gauss, y el teorema fundamental del cálculo todos son casos especiales del siguiente teorema de la geometría diferencial (conocido como teorema de Stokes):

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \tag{34}$$

Además que se ve todo bonito :)