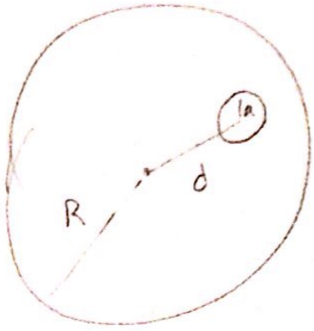
P1



Podemos tratar este problema con superposición de una esfera de radio R y densidad de carga uniforme $\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, con una esfera de radio a y densidad $-\rho$.

Usemos la forma diferencial de la ley de Gauss para una esfera de densidad ρ y radio R: dada la simetría esférica, $\vec{E}(\vec{r})$ sólo apunta en $\hat{r}$: $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})\,\hat{r}$. Además, $\vec{E}$ no depende del ángulo; sólo del radio $\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\hat{r}$. Estas cosas se ven parecidas, pero son muy distintas. Veamóslo :)

Gauss: $\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (dentro de la esfera, ya que fuera, $\rho = 0$)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(E_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(E_\phi\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pero $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\hat{r} \Rightarrow E_\theta = E_\phi = 0$

Const. de integración

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r\right) = \frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow r^2 E_r = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + C$$

Para determinar C, evaluamos la expresión en $r=0 \Rightarrow C=0$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad \text{dentro de la esfera}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\varepsilon_0}$$

Ahora que tenemos $\vec{E}$, volvamos a las esferas:

El centro de la esfera chica está en posición $\vec{d}$ respecto del centro de la grande.

Queremos evaluar $\vec{E}$ en un punto arbitrario $\vec{r}_1$ dentro de la esfera chica; descrito desde el centro de esta esfera chica, el punto es $\vec{r}_2$. El campo producido en ese punto por la esfera grande es $\vec{E}_1 = \frac{\rho \vec{r}_1}{3\varepsilon_0}$. Mientras tanto, para la esfera chica $\vec{E}_2 = \frac{-\rho \vec{r}_2}{3\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \boxed{\frac{\rho \vec{d}}{3\varepsilon_0}}$

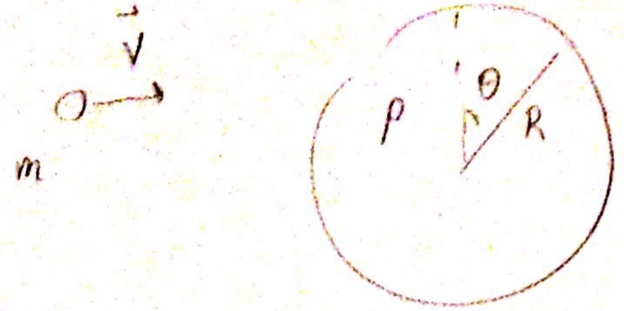
De la geometría del dibujo se ve que esto es $\vec{d}$:).

En términos de Q y R,

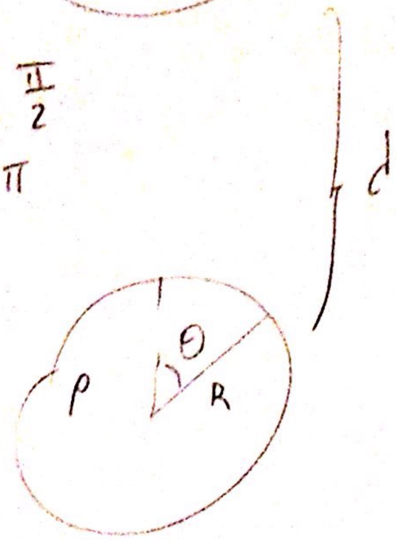
$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q\vec{d}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$$

Notamos que es constante!

P5



$$\rho(\theta) = \begin{cases} \rho_0 \,, & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -\rho_0 \,, & \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$



Empecemos calculando el momento dipolar de uno de los planetas:

$$\vec{p} = \int \rho(\vec{r}\,')\, \vec{r}\,'\, dV$$

Momento dipolar para distribución continua

$$\vec{r}\,' = \hat{r}\, r = r\left((\hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi)\sin\theta + \hat{z}\cos\theta \right)$$

La parte con $\cos\phi$, $\sin\phi$ se va a integrar a cero

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(\theta)\, r \left(\hat{z}\cos\theta\right) r^2 \sin\theta \, d\phi\, d\theta\, dr$$

Lo separamos en 2 integrales porque $\rho(\theta)$ varía discontinuamente

$$\Rightarrow \quad \vec{p} = 2\pi \int_0^R \int_0^{\pi/2} \hat{z}\, \rho_0\, r^3 \sin\theta\cos\theta \, d\theta\, dr - 2\pi \int_0^R \int_{\pi/2}^{\pi} \hat{z}\, \rho_0\, r^3 \sin\theta \cos\theta\, d\theta\, dr$$

$$\Rightarrow \vec{p} = \rho_0 2\pi \hat{z} \left[\int_0^R \int_0^{\pi/2} r^3 \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta\, dr - \int_0^R \int_{\pi/2}^{\pi} r^3 \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, d\theta\, dr \right]$$

$$= \pi\rho_0 \hat{z} \left[\frac{R^4}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2\theta) \Big|_0^{\pi/2} \right) - \frac{R^4}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\cos(2\theta) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi\rho_0 R^4 \hat{z}}{8} \left[-\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi \right] = \frac{\pi\rho_0 R^4 \hat{z}}{2}$$

$\Rightarrow$ Campo que produce planeta de abajo, en el lugar donde está el de arriba: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{d^3} \cdot 2$ (ver Griffiths pg 153 si quieren ver por qué)

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho_0 R^4 \hat{z}}{4\varepsilon_0 d^3}$$

Energía potencial inicial planeta superior: $U_i = -\vec{p}\cdot\vec{E}$

$$\Rightarrow U_i = -\frac{\pi\rho_0^2 R^8}{8\varepsilon_0 d^3}$$

Luego se da vuelta $\Rightarrow \vec{p} \to -\vec{p}$

Entonces $U_f = \frac{\pi\rho_0^2 R^8}{8\varepsilon_0 d^3} \Rightarrow \Delta E = \frac{\pi\rho_0^2 R^8}{4\varepsilon_0 d^3}$

$$\Rightarrow E_{asteroide} = \frac{1}{2}mv^2 = \Delta E$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\pi\rho_0^2 R^8}{2m\varepsilon_0 d^3}}}$$