

## Tarea N°5

Fecha de entrega: viernes 24 de noviembre

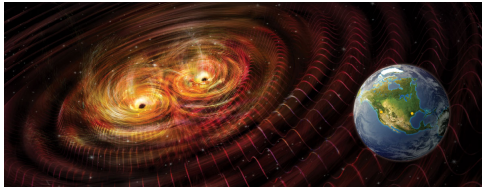
FI2002-6: Electromagnetismo  
13 de noviembre de 2017

**Profesor:** Francisco Brieva

**Auxiliares:** Manuel Morales, Nicolás Valdés

### P1. Ondas Gravitacionales

Se han detectado ondas gravitacionales emitidas por colisiones entre agujeros negros, cosa que ha causado mucha emoción. Para analizar dichas ondas es necesario recurrir a la relatividad general, sin embargo, nosotros utilizaremos gravitación newtoniana para intentar entender las ondas gravitacionales.



- (a) La fuerza gravitacional que ejerce una partícula con masa  $m_1$ , en  $\mathbf{r}_1$  sobre otra con masa  $m_2$ , en  $\mathbf{r}_2$  está dada por

$$\mathbf{F} = -Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (1)$$

De manera análoga a como se hizo en electrostática,

- (i) Defina el campo gravitacional  $\mathbf{E}_g$  debido a una partícula de masa  $m$ .
  - (ii) Usando el principio de superposición encuentre el campo gravitacional producido por una densidad de masa  $\rho(\mathbf{r}')$  en un punto  $\mathbf{r}$ .
  - (iii) Encuentre el rotor y la divergencia del  $\mathbf{E}_g$  producido por una densidad de masa  $\rho$ . Estas son dos de las leyes de Maxwell para la gravitación (versión estática).
- (b) Hay un campo análogo al campo magnético que se produce por el movimiento de masa (“corriente de masa”). Llamémoslo campo gravitomagnético  $\mathbf{B}_g$ . Se tiene que para una masa  $m$  con velocidad  $\mathbf{v}$ , la fuerza debida al campo gravitomagnético es  $\mathbf{F} = m\mathbf{v} \times \mathbf{B}_g$ .

- (i) Definimos una corriente de masa como  $I = dm/dt$ . Además, definimos la densidad volumétrica de corriente  $\mathbf{J}$  a través de  $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ . El campo  $\mathbf{B}_g$  producido por una densidad  $\mathbf{J}$  es

$$\mathbf{B}_g(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_g}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (2)$$

Encuentre el rotor y la divergencia de  $\mathbf{B}_g$ . Dos nuevas leyes de Maxwell!

- (ii) Demuestre que  $\nabla \cdot \mathbf{J} + d\rho/dt = 0$ .
- (c) Si el campo gravitomagnético  $\mathbf{B}_g$  cambia en el tiempo, se tiene  $\nabla \times \mathbf{E}_g = -\partial\mathbf{B}_g/\partial t$ . Complete sus ecuaciones de Maxwell, justificando cualquier cambio que haga.
- (d) (i) Encuentre la ecuación que describe ondas gravitacionales.  
(ii) Si las ondas gravitacionales viajan a la velocidad de la luz  $c$ , determine la constante  $\mu_g$ .  
(iii) ¿Cuál es el vector de Poynting asociado a ondas gravitacionales? ¿Y la intensidad de las ondas?  
(iv) Describa en palabras por qué dos agujeros negros que colisionan emiten ondas gravitacionales.  
(v) La fórmula de Larmor indica la potencia irradiada por una carga  $q$  con aceleración  $a$ :

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (3)$$

¿Cuál es la ecuación análoga en gravitación? Considere agujeros negros de 36 y 29 masas solares, orbitando uno en torno al otro. Cuando están a una distancia de  $2 \times 10^5$  m, ¿aproximadamente qué potencia irradia el sistema? Se observó este sistema en la vida real, y su máxima emisión fue de  $3 \times 10^{49}$  W. Comente.

**P2.** Considere un condensador de placas planas paralelas circulares (parecido al que aparece abajo) lleno con un material dieléctrico de permitividad eléctrica  $\epsilon$ . El dieléctrico posee además conductividad  $\sigma$  y capacidad  $C$ . Se carga a una diferencia de potencial  $V_0$  y se aísla.

- Obtenga la carga del condensador en función del tiempo.
- Calcule la corriente de desplazamiento en el dieléctrico.
- Encuentre el campo magnético en el dieléctrico.



Figura 1: Condensador de placas planas.

**P3.** Considere un alambre cilíndrico recto de conductividad  $g$  y de sección transversal  $A$ . Conduzca una corriente  $I$  uniformemente distribuida.

- Determine la dirección y la magnitud del vector de Poynting en la superficie del alambre.
- Integre la componente normal del vector de Poynting sobre la superficie del alambre para un segmento de longitud  $L$  y compare con el resultado esperado de acuerdo al Efecto Joule. ¿Se corresponden?