Series de Fourier.

Una f periódica $F(t)$ tq $F(t+T)=F(t)$ puede escribirse como:

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos(2\pi f m t) + B_m \operatorname{sen}(2\pi f m t) \right)$$

con $f = 1/T$, $A_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\,dt$, $A_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\cos(2\pi f t m)\,dt$

$$B_m = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\operatorname{sen}(2\pi f t m)\,dt.$$

* Para entender esto pueden pensar que los senos y cosenos son una base y luego pueden escribir cualquier función como combinación lineal de ellos. En este caso los A_m y B_m serían las proyecciones sobre dichas bases.

Es más, se verifica que:

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi m f_0 t)\cos(2\pi m f) = \delta(m,m) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq m \\ 1 & \text{si } m = m \end{cases}$$

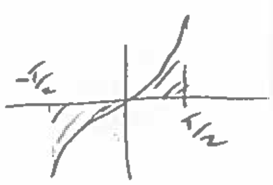
$\circ\ \mathbb{1}(m,m)$

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi m f t)\operatorname{sen}(2\pi m f) = \delta(m,m)$$

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi m f t)\cos(2\pi m f t) = 0.$$

Ojo que si F par $\longrightarrow B_m = 0$ (Estamos integrando una f. impar con respecto a 0)

F impar $\rightarrow A_m = 0$



$= 0$

* Recuerden par · par = par
par · impar = impar
impar · impar = par.

$= 2\cdot$

y cos es par c/r a 0
sen es impar c/r a 0.

Regresión lineal:

Dado una serie de puntos (x_i, y_i) se busca encontrar la recta $y_i^m = a x_i + b$. tal que $|y_i^m - y_i|^2$ sea mínima.

O sea buscamos minimizar $\chi^2 = \sum (y_i^m - y_i)^2 = \sum (a x_i + b - y_i)^2$

Para eso hacemos $\frac{d\chi^2}{da} = 0 \wedge \frac{d\chi^2}{db} = 0$

$$\boxed{a = \frac{\left(\frac{\sum_{i=0}^{N} x_i \cdot y_i}{\sum x_i} - \frac{\sum^{N} y_i}{N} \right)}{\left(\frac{\sum x_i^2}{\sum x_i} - \frac{\sum x_i}{N} \right)} \qquad b = \frac{\sum^{N} y_i}{N} - a \frac{\sum x_i}{N}}$$

N = nº de puntos que se tienen

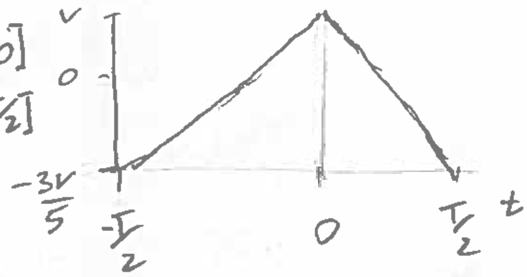
$$R^2 = 1 - \frac{\chi^2}{\sum (y_i - \langle y \rangle)^2}$$

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum y_i$$

R^2 es una medida de cuan bueno es el ajuste → si es 1 el ajuste está bueno, si es 0 es que los datos que se tomaron no están relacionados por una función lineal (esto es matizado igual, no hay que ser tajante, pero es un buen indicador si hicieron bien la pega).

P1 Se tiene la siguiente función:

$$F(t) = \begin{cases} a_1 t + b_1 & t \in [-T/2, 0] \\ a_2 t + b_2 & t \in [0, T/2] \end{cases}$$



a) Encontrar a_1, b_1, a_2, b_2

Usamos la ec de la recta en ambos tramos $y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$

Para el 1er tramo:

$$y + \frac{3V}{5} = \frac{V + \frac{3V}{5}}{T/2}(t + T/2) \rightarrow y = \frac{8V \cdot 2}{5T} t + \frac{8V}{5} - \frac{3V}{5} = \frac{16V}{5T} t + V$$

Para el 2do tramo:

$$y + \frac{3V}{5} = \frac{V + 3V/5}{-T/2}(t - T/2) \rightarrow y = -\frac{8V \cdot 2}{5T} t + \frac{8V}{5} - \frac{3V}{5} = -\frac{16Vt}{5T} + V$$

b) Escribir la serie de Fourier

Ver que es una f par $\rightarrow B_n = 0$

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-T/2}^{0} \frac{16V}{5T} t + V + \int_{0}^{T/2} -\frac{16V}{5T} + V\right]$$

$$= \frac{2}{T}\left[\frac{16V}{5T}\frac{t^2}{2}\Big|_{-T/2}^{0} + -\frac{16V}{5T}\frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{T/2} + VT\right] = \frac{2}{T}\left(-\frac{8V}{5T}\frac{T^2}{4} - \frac{8VT^2}{5T \cdot 4} + VT\right)$$

$$A_0 = 2V - \frac{8V}{5} = \boxed{\frac{2V}{5} = A_0.}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} F(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt$$

* Ahora vamos a ser más listos y cechamos que $\int_{-T/2}^{T/2} = 2\int_0^{T/2}$ porque es una función par

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2}\left(-\frac{16V}{5T}t + V\right)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt.$$

$$= \frac{4}{T}\left[-\frac{16V}{5T}\underbrace{\int_0^{T/2} t\cos(2\pi n f_0 t)\,dt}_{i} + \int_0^{T/2} V\cos(2\pi f_0 t)\right.$$

$u = t;\ du = 1$

$dv = \cos(2\pi f_0 t)\ ;\ v = \frac{\operatorname{sen}(2\pi f_0 t n)}{2\pi f_0 n}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\to uv' = (uv)' - u'v$

$\int uv' = (uv) - \int u'v$

$$i \to \left.\frac{t\operatorname{sen}(2\pi f_0 n t)}{2\pi f_0 n}\right|_0^{T/2} - \int_0^{T/2}\frac{\operatorname{sen}(2\pi n f_0 t)}{2\pi f_0 n}\,dt$$

*Recordamos que $f_0 = 1/T$

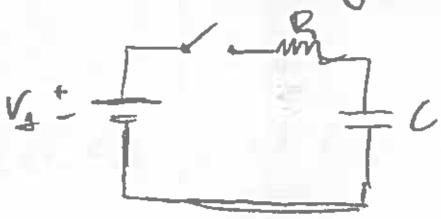
$$= \underbrace{\frac{T}{2}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right)}{2\pi\cdot\frac{1}{T}n}}_{\operatorname{sen}(\pi)=0} + \frac{T}{2\pi n}\cdot\left.\frac{\cos(2\pi f_0 t n)}{2\pi f_0 n}\right|_0^{T/2}$$

$$= T^2\frac{\cancel{\operatorname{sen}(n\pi)}^{0}}{\cancel{4\pi n}} + T^2\frac{\cos(\pi n)}{4\pi^2 n^2} = \frac{T^2(-1)^n}{4\pi^2 n^2}$$

$$\to A_n = \frac{4}{T}\left[\frac{-16V}{5T}\cdot\frac{T^2(-1)^n}{4\pi^2 n^2} + \underbrace{\frac{V\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{T}\frac{T}{2}\right)}{2\pi f_0}}_{0}\right] = \frac{16V}{5\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}$$

$$\to \boxed{F(t) = \frac{2V}{5} + \sum \frac{16V}{5\pi^2 n^2}(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right)}$$

P2| Se tiene el siguiente circuito.



$C = 100\,\mu F$

$V_1 = 5.1\,V$

Se mide el proceso de carga del condensador.

$V_c \pm 0{,}01$	0,08	2,06	3,17	3,98	4,39	4,59	4,78	4,9	5,0	5,04	4,98
$t \pm 0{,}01$	0,00	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0

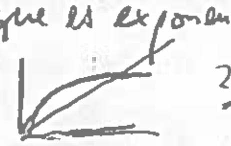
a) Linealize el problema:

1ero que nada hay que ver las ec. que rigen el circuito, en este caso desempolvando nuestros conocimientos recordamos que $i_C = \frac{dV_c}{dt} \cdot C$ y nos queda la edo $V = I_C R + V_c = \frac{dV_c}{dt} CR + V_c$ y eso sumado a las cond. iniciales

$V_c(t) = V_0(1 - e^{-t/RC})$ ⇝ Ec de carga de un condensador.

$\boxed{\text{* No podían usar impedancias, recuerden que eso sólo es válido para voltajes AC y en este caso es DC}}$

Ahora no tiene sentido usar regresión lineal sobre esta ec porque es exponencial así que los valores a y b que darían no tendrían sentido



Así que hay que escribir el problema como una ec de la recta:

$$V_c(t) = V_0(1 - e^{-t/RC}) \longrightarrow e^{-t/RC} = \left(1 - \frac{V_c}{V}\right)$$

$$\frac{-t}{RC} = \ln\left(1 - \frac{V_c}{V_0}\right)$$

donde sí podemos asociar la expresión con una ec del tipo $y_i = a x_i + b$.

$$y_i = \ln\left(1 - \frac{V_c}{V_0}\right) \qquad x_i = t \qquad a = \frac{-1}{RC}, \quad b = 0$$

b) Calcular la pendiente de la rect y la intersección

De los datos de la tabla calculamos y_i

$y_i = (-0.006, -0.22, -0.42, -0.65, -0.85, -1, -1.2, -1.4, -1.7, -1.9, -1.6)$

Para sacar a y b hay 2 formas:

① Usar las formulas horribles y calcular a mano
② Aprender a usar la calculadora (debiesen tener un modo donde esta la regresión lineal, solo deben meter los datos y la calculadora hace magia)

$a = -0{,}37 \qquad b = -0{,}068 \rightarrow y = ax + b \; ; \; R = -0{,}979$
$R^2 = 0{,}958$

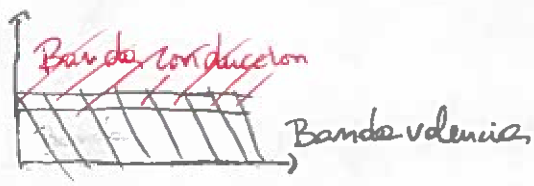
* Cuidado con el formato en que para los resultado su calculadora por ej la casio fx-82ES usa la nomenclatura $y = a + bx$.

c) Calcule el valor de la resistencia R :

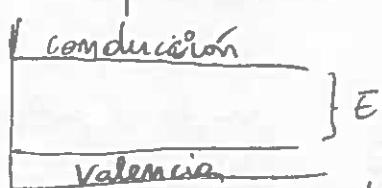
Recordamos que $a = \frac{-1}{RC} \rightarrow R = 27027\,\Omega = 27{,}027\,[k\Omega]$.

Miniresumen de Diodos:

Los materiales pueden pensarse por medio de bandas en que viven los $\bar{e}$, la de valencia donde estan los $\bar{e}$ fijos a la estructura atomica y la banda de conducción que es donde los $\bar{e}$ pueden moverse.



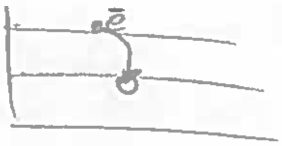
Metal → tiene las 2 bandas superpuestas



aislante → bandas muy separadas, cuesta bastante energía sacar un $\bar{e}$ de la banda de valencia

Los semiconductores son materiales que poseen "dopantes". Para entenderlo supongan que se le agrega un $\bar{e}$ al material este vive sobre la banda de valencia con lo que necesita solo un poco de energía para "saltar" a la banda de conducción generando corriente.

Ahora si en vez de un ē metemos un "hueco" (o sea generamos un espacio en la banda de valencia) los ē de la banda de conducción van a querer bajar para taparlo y eso también genera un punto intermedio donde los ē requieren un empujón y saltan generando corrientes.

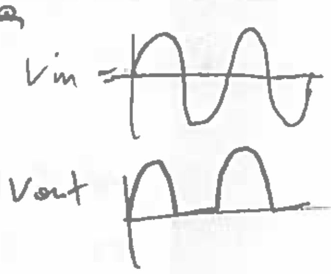


→ Semiconductores: tipo N = dopantes ē.
tipo P = dopantes huecos.

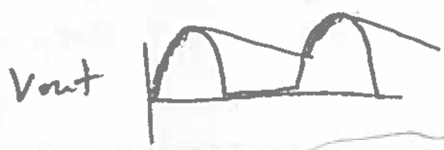
Diodo = Es un semiconductor N pegado con un semiconductor P, hacen que la corriente solo pueda circular en 1 sentido, en el dibujo solo circula en la dirección en que apunta la flecha.

Rectificador de media onda

Vout.



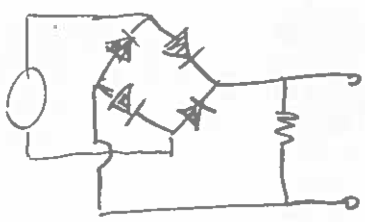
Si agregamos un diodo.



* El diodo se carga en el semiciclo positivo y en el negativo se descarga

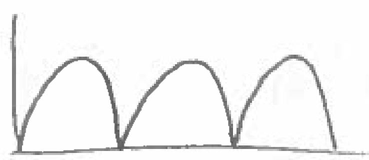
* la línea roja es el Vout, la otra es de referencia

Rectificador de onda completa



Vout.

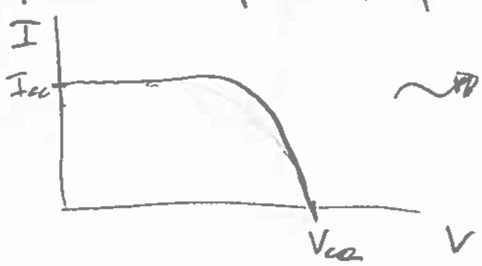
Vout =



Celdas fotovoltaicas.

Basicamente es un semiconductor que recibe energía de los fotones para que sus ē salten de banda produciendo corrientes.

$E_{fotones} = hf$, $f = \lambda \cdot c$



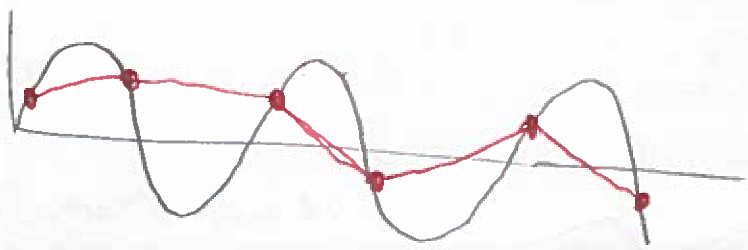
→ curva IV típica de una celda.

tarjeta de adquisición.

- frec de muestreo: son la cantidad de muestras que tomo por segundo
- Resolución: son la cantidad de intervalos en que se subdivide una medición. Por ejemplo si medimos de 0-5 [V] con una resolución de 8 bits se divide el espacio en 2^8 franjas, sea que cada franja mide $\frac{5-0}{(2^8-1)} = 0{,}196\,[V]$.

- aliasing: Cuando la frec de muestreo es muy baja (tomo muy pocos puntos en un intervalo de tiempo dado) la señal que se obtiene no representa la situación.

Ej:



Señal real
Señal medida

Para que esto no pase

$f_{muestreo} \geq 2 \cdot frec\ señal$

P3) Se tiene el siguiente sistema:

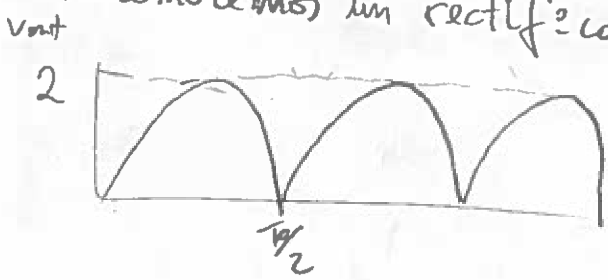
$V(t)$ = señal sinusoidal de $4V_{pp}$ y frec 2KHz.
Suponga diodos ideales.

a) Encuentre serie de Fourier de Vout.

$$V(t) = 2\,\text{sen}(2\cdot 10^3 \cdot 2\pi \cdot 10^3 t) \quad ; \quad T_0 = \frac{1}{f_0} = 5\cdot 10^{-4}$$

* Voy a llamar la frec de la señal de entrada f_0.

Reconocemos un rectificador de onda completa.



⇝ función periodica con periodo $T_0/2$

ojo: este $f = \frac{1}{T_0/2} = \frac{2}{T_0} = 2f_0$

$$B_m = \frac{2}{T/2}\int_0^{T/2} 2\,\text{sen}(2\pi f_0 t)\,\text{sen}(2\pi \cdot f t m)$$

$$\text{sen}(x)\,\text{sen}(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

$$\rightarrow B_n = \frac{4}{T}\left[\frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{2}}\left(\int_0^{T/2}\cos(2\pi f_0 t(1-2m)) - \int_0^{T/2}\cos(2\pi f_0 t(1+2m))\right)\right]$$

$$= \frac{4}{T}\left[\left.\frac{\text{sen}(2\pi f_0 t(1-2m))}{2\pi f_0 (1-2m)}\right|_0^{T/2} - \left.\frac{\text{sen}(2\pi f_0 t(1+2m))}{2\pi f_0 (1+2m)}\right|_0^{T/2}\right]$$

Evaluamos $\text{sen}(0) = 0$ y $\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}(1\pm 2m)\right) = 0$

$\rightarrow B_m = 0$.

* Podríamos haber argumentado que era una f par, o la ortogonalidad de funciones seno para ahorrar matraca.

$$A_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} 2\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\,dt = \frac{4}{T}\left[\cancel{2}\cdot \frac{-\cos(2\pi f_0 t)}{\cancel{2}\pi f_0}\Bigg|_0^{T/2}\right]$$

$\cos(0) = 1$ y $\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}\right) = -1$

$$\rightarrow \frac{4}{\cancel{T}}\left[\frac{1}{\frac{\pi}{\cancel{T}}} + \frac{1}{\frac{\pi}{\cancel{T}}}\right] = \frac{8}{\pi}$$

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} 2\,\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)\cos(4\pi f_0 n t)$$

$*\ \mathrm{sen}(x)\cos(y) = \frac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

$$A_n = \frac{4}{T}\left[\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{2}}\left(\int_0^{T/2}\left(\mathrm{sen}(2\pi f_0(1+2n)t) + \mathrm{sen}(2\pi f_0(1-2n)t)\right)\right)\right]$$

$$= \frac{4}{T}\left[-\frac{\cos(2\pi f_0(1+2n)t)}{2\pi f_0(1+2n)}\Bigg|_0^{T/2} - \frac{\cos(2\pi f_0(1-2n)t)}{2\pi f_0(1-2n)}\Bigg|_0^{T/2}\right]$$

$$= \frac{4}{T}\left[\frac{1}{2\pi f_0(1+2n)} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}(1+2n)\right)}{2\pi f_0(1+2n)} + \frac{1}{2\pi f_0(1-2n)} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}(1-2n)\right)}{2\pi f_0(1-2n)}\right]$$

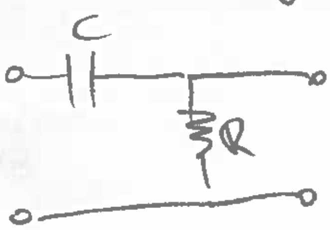
$$= \frac{4}{T}\left[\frac{(1-2n)+(1+2n)}{2\pi f_0(1+2n)(1-2n)} - \frac{(-1)}{2\pi f_0(1+2n)} - \frac{(-1)}{2\pi f_0(1-2n)}\right]$$

$*$ $1+2n$ siempre es impar $\rightarrow \cos(\pi(1+2n)) = -1\ \forall n$. , idem $\cos(\pi(1-2n))$

$$A_n = \frac{4}{T}\left[\frac{4}{2\pi f_0(1+2n)(1-2n)}\right] = \frac{8}{(1+2n)(1-2n)}$$

$$\rightarrow \boxed{F(t) = \frac{8}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(1+2n)(1-2n)}\cos(4\pi f_0 n t)}$$

b) Ahora se agrega el siguiente circuito a la salida del anterior sistema



$R = 1K\Omega$

$C = 198\ pF$.

Escriba la nueva serie de Fourier.

→ Filtro pasa-altos: → $w_{corte} = \dfrac{1}{RC}$

$$w_c = 5050505 \left[\frac{rad}{seg}\right].$$

Ahora todas las señales que esten oscilando bajo esa frecuencia las mata el filtro, osea que buscamos la componente de la serie de fourier que este oscilando a w_c.

$$w_c = 4\pi f_0 n \rightarrow n = \frac{w_c}{4\pi f_0} = 200{,}95.$$

Asi que todas las señales con n menor a 201 son filtradas y sobre 201 el filtro las deja pasar, con lo que la señal queda

$$\boxed{F(t) = \sum_{n=201}^{\infty} \frac{8}{(1+2n)(1-2n)} \cos(4\pi f_0 n t)}$$

* La parte DC tamb la matan los filtros.

Si se fijan para $n > 201$ los A_n son cada vez más pequeños, esto tiene sentido ya que si recordamos que $V(t) = 2\,sen(2\pi f_0 t)$ $t \in (0, T/2)$ tiene una frec de $w_0 = 12566{,}37$ que es menor a w_c con lo que lo filtra, asique nuestro resultado tiene sentido.