INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702 - Investigación de Operaciones
Profesor: D. Sauré
Auxiliares: C. Aguayo, P. Galaz, S. Gallardo, S. Maccioni, J. Siebert

Auxiliar #09: Preparación Control 2

Procesos de Poisson - Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1 (C2, 2017-1)

Durante un focus group se realiza una sesión de "brainstorming", en el cual los participantes proponen ideas, las anotan en post-its y las pegan en una cartulina convenientemente grande. Considere que se tiene un conjunto C de colores distintos de post-its, y que éstos son pegados en la cartulina según un proceso de Poisson de tasa $\lambda_c > 0$ [post-its/minuto] para cada $c \in C$, y de forma independiente entre ellos.

1. Considerando que al inicio de la sesión, la cartulina no tiene post-its pegados, ¿cuál es la probabilidad de que después de H horas, no haya ningún post-it en la cartulina?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer post-it que se pegue sea de color c?
3. Se sabe además que la probabilidad de que la idea que esté escrita en un post-it de color c sea "innovadora" es p_c. ¿Cuál es la probabilidad de que en T minutos se hayan pegado i post-its de color c con ideas "innovadoras", sabiendo que en esos T minutos se pegaron exactamente K post-its de color c?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que en T minutos se hayan pegado i post-its con ideas "innovadoras", sabiendo que en esos T minutos se pegaron exactamente K post-its?
5. Considere ahora que la cartulina puede tener pegados a los más B post-its. Calcule el número esperado de cartulinas que se necesitan para una sesión de H horas de duración.

Problema 2 (Ex, 2017-1)

En una fiesta, n amigos se sientan en una mesa circular y deciden jugar el siguiente juego: partiendo por el dueño de casa, un jugador debe: 1. tomar un vaso de *agua*; 2. lanzar una moneda; 3. si la moneda cae cara, pasar el vaso a la derecha, si cae sello, pasar el vaso a la izquierda. Esta jugada se repite de forma indefinida hasta que dan las 7 a.m. (actualmente son las 11 p.m., cada jugada toma menos de un minuto en ocurrir).

1. Modele el juego como una cadena de Markov en tiempo discreto. Es la cadena reversible? Justifique su respuesta.
2. Calcule la probabilidad que el jugador que esta a i lugares a la derecha del dueño de casa sea el que esta jugando cuando marcan las 7 a.m.
   Hint: diferencie entre los casos n par y n impar.
3. Suponga que el dueño de casa es el único jugador que tira un dado en lugar de una moneda: cuando el resultado es 1, pasa el vaso a la derecha; si el resultado es 2, pasa el vaso a la izquierda; con cualquier otro resultado, se queda con el vaso. Responda nuevamente la partes anteriores bajo esta nueva situación.

Problema 3 (C2, 2007-2)

Una fundación ha realizado una serie de estudios respecto a cómo se desplazan un grupo de ladrones y policías dentro de la capital. De acuerdo al estudio si se observa semana semana la localización de cada grupo, estas se pueden representar como una cadena de Markov en tiempo discreto independientes entre si.

Los ladrones evolucionan de la Zona A de la ciudad a la Zona B con probabilidad 0,2 en tanto que con probabilidad 0,5 van de la Zona A a la Zona C. A su vez, de la Zona C solo pueden evolucionar a la Zona A. Finalmente, si están en la Zona B, la probabilidad que a la semana siguiente continúen allí es de 0,4, mientras que la probabilidad que vayan de la Zona B a la Zona A es de 0,4.

Para los policías, las probabilidades de transición son las siguientes: si están en la Zona A la probabilidad de que se queden ahí es 0,3 y 0,5 de que vayan a la Zona B. Si están en la Zona B, con seguridad se desplazarán a la Zona A. Finalmente, si están en la zona C, con probabilidad 0,2 se dirigen a la Zona B y con probabilidad 0,4 a la Zona A.

La fundación ha solicitado que responda las siguientes preguntas.

1. Modele la CM que describe semana a semana la ubicación de los ladrones. Si es posible, calcule probabilidades estacionarias de la cadena. Argumente por qué es o no posible calcular estas probabilidades.

2. Modele la CM que describe semana a semana la ubicación de los policías. Si es posible, calcule probabilidades estacionarias de la cadena. Argumente por qué es o no posible calcular estas probabilidades.

3. ¿Cuál es la probabilidad de que, en un periodo en el largo plazo, los policías y ladrones se encuentren en la misma zona?

4. Supongamos que estamos en el largo plazo. Los ladrones van a llevar a cabo su próximo atraco en la Zona A, ¿cuál es la probabilidad de que los policías no estén en la misma zona para impedirlo?