INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702 - Investigación de Operaciones
Profesor: D. Sauré
Auxiliares: C. Aguayo, P. Galaz, S. Gallardo, S. Maccioni, J. Siebert

Pauta Auxiliar #09: Preparación Control 2

Procesos de Poisson - Cadenas de Markov en Tiempo Discreto

Problema 1

1. Considerando que al inicio de la sesión, la cartulina no tiene post-its pegados, ¿cuál es la probabilidad de que después de H horas, no haya ningún post-it en la cartulina?

   Solución: Se define $N(t)$ como el proceso de conteo de post-its de todos los colores. $N(t)$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda = \sum_{c \in C} \lambda_c$ [post-its/minuto]. Entonces, la probabilidad pedida es:

   $$\mathbb{P}(N(t = 60H) = 0) = e^{-60H\lambda}$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el primer post-it que se pegue sea de color c?

   Solución: Se define $N_c(t)$ como el proceso de conteo de post-its de color c, y se define $N_{-c}(t)$ como el proceso de conteo de post-its de todos los otros colores, excepto c. Ambos son procesos de Poisson de tasas λ_c y $\lambda_{-c} = \sum_{k \in C : k \neq c} \lambda_k$ respectivamente. Entonces, la probabilidad de que el primer post-it que llegue sea de color c se puede calcular fácilmente con la propiedad de "carrera de exponenciales":

   $$\frac{\lambda_c}{\lambda_c + \lambda_{-c}}$$

3. Se sabe además que la probabilidad de que la idea que esté escrita en un post-it de color c sea "innovadora" es p_c. Cuál es la probabilidad de que en T minutos se hayan pegado i post-its de color c con ideas "innovadoras", sabiendo que en esos T minutos se pegaron exactamente K post-its de color c?

   Solución: Sea $N_c^I(t)$ el proceso de conteo de los post-its de color c que tienen ideas innovadoras, y sea $N_c^{-I}(t)$ el proceso de conteo de los post-its de color c que no tienen ideas innovadoras. Nuevamente, ambos son procesos de Poisson de tasas $\lambda_c p_c$ y $\lambda_c(1-p_c)$ respectivamente. Entonces:

   $$\mathbb{P}(N_c^I(T) = i | N_c(T) = K) = \frac{\mathbb{P}(N_c^I(T) = i, N_c(T) = K)}{\mathbb{P}(N_c(t) = K)} = \frac{\mathbb{P}(N_c^I(T) = i)\mathbb{P}(N_c^{-I}(T) = K - i)}{\mathbb{P}(N_c(T) = K)}$$

   $$\mathbb{P}(N_c^I(T) = i | N_c(T) = K) = \binom{K}{i} \frac{(\lambda_c p_c T)^i e^{-\lambda_c p_c T} \cdot (\lambda_c(1-p_c)T)^{K-i} e^{-\lambda_c(1-p_c)T}}{(\lambda_c T)^K e^{-\lambda_c T}} = \binom{K}{i} p_c^i (1-p_c)^{K-i}$$

4. ¿ Cuál es la probabilidad de que en T minutos se hayan pegado i post-its con ideas "innovadoras", sabiendo que en esos T minutos se pegaron exactamente K post-its?

   Solución: Sea $N^I(t)$ el proceso de conteo de los post-its con ideas innovadoras, y sea $N^{-I}(t)$ el proceso de conteo de los post-its con ideas no innovadoras. Como ya pasó antes, ambos son procesos de Poisson de tasas $\lambda_I = \sum_{c \in C} \lambda_c p_c$ y $\lambda_{-I} = \sum_{c \in C} \lambda_c (1 - p_c)$ respectivamente. Calculamos:

   $$\mathbb{P}(N^I(T) = i | N(T) = K) = \frac{\mathbb{P}(N^I(T) = i, \mathbb{P}(N(T) = K))}{\mathbb{P}(N(T) = K)} = \frac{\mathbb{P}(N^I(T) = i)\mathbb{P}(N^{-I}(T) = K - i)}{\mathbb{P}(N(T) = K)}$$

$$\mathbb{P}(N^I(T)=i|N(T)=K)=\binom{K}{i}\frac{(\lambda_I T)^i e^{-\lambda_I T}\cdot(\lambda_{-I}T)^{K-i}e^{-\lambda_{-I}T}}{(\lambda T)^K e^{-\lambda T}}=\binom{K}{i}\frac{(\lambda_I)^i(\lambda_{-I})^{K-i}}{\lambda^K}$$

5. ¿Considere ahora que la cartulina puede tener pegados a los más B post-its. Calcule el número esperado de cartulinas que se necesitan para una sesión de H horas de duración.

   Solución: Calculamos:
   $$\mathbb{E}(N(60H))=60\lambda H$$
   El número esperado de cartulinas es:
   $$\frac{60\lambda H}{B}$$

Problema 2

En una fiesta, n amigos se sientan en una mesa circular y deciden jugar el siguiente juego: partiendo por el dueño de casa, un jugador debe: 1. tomar un vaso de *agua*; 2. lanzar una moneda; 3. si la moneda cae cara, pasar el vaso a la derecha, si cae sello, pasar el vaso a la izquierda. Esta jugada se repite de forma indefinida hasta que dan las 7 a.m. (actualmente son las 11 p.m., cada jugada toma menos de un minuto en ocurrir).

1. Modele el juego como una cadena de Markov en tiempo discreto. ¿Es la cadena reversible? Justifique su respuesta.
2. Calcule la probabilidad que el jugador que esta a i lugares a la derecha del dueño de casa sea el que esta jugando cuando marcan las 7 a.m.
   Hint: diferencie entre los casos n par y n impar.
3. Suponga que el dueño de casa es el único jugador que tira un dado en lugar de una moneda: cuando el resultado es 1, pasa el vaso a la derecha; si el resultado es 2, pasa el vaso a la izquierda; con cualquier otro resultado, se queda con el vaso. Responda nuevamente la partes anteriores bajo esta nueva situación.

Solución:

1. Planteemos la matriz de probabilidades de transición:

$$P=\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & \cdots & \cdots & p_{1,n-1} & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & \cdots & \cdots & p_{2,n-1} & p_{2,n} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & \cdots & \cdots & p_{3,n-1} & p_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{n-1,1} & p_{n-1,2} & p_{n-1,3} & \cdots & \cdots & p_{n-1,n-1} & p_{n-1,n} \\ p_{n,1} & p_{n,2} & p_{n,3} & \cdots & \cdots & p_{n,n-1} & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La cadena de Markov propuesta es reversible, porque, dada la geometría del problema, la fracción de transiciones desde un estado i a un estado j en el largo plazo, es igual a la fracción de transiciones que se realizan desde j a i

2. Lo de las 7 a.m. sólo sirve para forzar el estado estacionario de la cadena. Separaremos en casos:

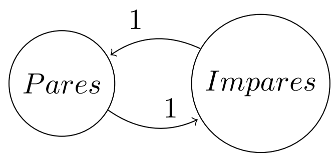
   $\boxed{n \text{ par}}$ La cadena de Markov es finita y tiene una sola clase recurrente. Sin embargo, en este caso, no se tiene la aperiodicidad. Dado un estado i, sólo podremos regresar a ese estado i después de un número par de transiciones, por lo que el máximo común divisor los k tales que $p_{ii}^{(k)} > 0$ es igual a 2. En este caso, existe:

$$\pi = \pi P = \frac{\vec{1}}{n}$$

   pero no existe:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j$$

   Una representación de la cadena para n par es de la forma



   $\boxed{n \text{ impar}}$ La cadena sigue siendo finita y con una sola clase recurrente, y además, en este caso, la cadena si es aperiódica. Dado un estado i, además de poder regresar a i después de un número par de transiciones, siempre podemos regresar en n transiciones. Es decir, podemos "recorrer" la cadena completa en un sólo sentido. Como el máximo común divisor entre números pares y un número impar siempre es 1, la cadena es aperiódica. Por lo tanto, existe $\pi = \pi P$ y $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{n} = \pi_j$, y de hecho, son lo mismo.

$$\pi = \frac{\vec{1}}{n}$$

3.
$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Ahora, independiente de si n es par o impar, existen probabilidades estacionarias, ya que la cadena sigue siendo finita y teniendo una sola clase recurrente, y además, ahora es aperiódica. Veremos dos formas de calcular las probabilidades estacionarias:

   Forma tradicional: Planteamos las ecuaciones:

$$\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_n + \frac{2}{3}\pi_1$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_3 + \frac{1}{6}\pi_1$$

$$\pi_n = \frac{1}{2}\pi_{n-1} + \frac{1}{6}\pi_1$$
$$\pi_i = \frac{1}{2}\pi_{i-1} + \frac{1}{2}\pi_{i+1} \qquad i \notin \{1, 2, n\}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$$

Notamos que por simetría $\pi_2 = \pi_n$. La ecuación de π_1 nos dice que:

$$\pi_1 = 3\pi_2$$

Para los $i \notin \{1, 2, n\}$, nuevamente la simetría nos dice que son iguales. Planteando la ecuación para $i = 3$:

$$\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_4 = \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3$$
$$\pi_3 = \pi_2$$

Lo mismo ocurre con la ecuación de π_{n-1}. Entonces, $\pi_2 = \pi_3 = ... = \pi_{n-1} = \pi_n$ Utilizando la ecuación de que la suma de las probabilidades es igual a 1:

$$3\pi_2 + (n-1)\pi_2 = 1$$
$$\pi_2 = \frac{1}{n+2}$$
$$\pi_1 = \frac{3}{n+2}$$

Forma innovadora: Utilizando reversibilidad:

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$$
$$\frac{1}{6}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$$
$$\frac{1}{6}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_n$$

Para $i \neq j \neq 1$:

$$\frac{1}{2}\pi_i = \frac{1}{2}\pi_j$$

Y recuperamos la misma solución de antes.

Problema 3

a) La cadena posee probabilidad estacionarias ya que es ergódica. Para calcularlas haremos lo siguiente.

$$\begin{bmatrix} \pi_{\mathrm{A}} & \pi_B & \pi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{\mathrm{A}} & \pi_B & \pi_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto genera las siguientes ecuaciones:

$$\pi_{\mathrm{A}} = 0,3\pi_{\mathrm{A}} + 0,4\pi_{\mathrm{B}} + \pi_{\mathrm{C}}$$

$$\pi_{\mathrm{B}} = 0,2\pi_{\mathrm{A}} + 0,4\pi_{\mathrm{B}}$$

$$\pi_{\mathrm{C}} = 0,5\pi_{\mathrm{A}} + 0,2\pi_{\mathrm{B}}$$

$$\pi_{\mathrm{A}} + \pi_{\mathrm{B}} + \pi_{\mathrm{C}} = 1$$

Resolviendo el sistema se llega a:

$$\pi_{\mathrm{A}} = 0,525; \pi_{\mathrm{B}} = 0,175; \pi_{\mathrm{C}} = 0,3$$

b) Mismo argumento de la cadena anterior.
El sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} \pi_{\mathrm{A}} & \pi_B & \pi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{\mathrm{A}} & \pi_B & \pi_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0,2 & 0,4 \end{bmatrix}$$

Esto genera las siguientes ecuaciones:

$$\pi_{\mathrm{A}} = 0,3\pi_{\mathrm{A}} + \pi_{\mathrm{B}} + 0,4\pi_{\mathrm{C}}$$

$$\pi_{\mathrm{B}} = 0,5\pi_{\mathrm{A}} + 0,2\pi_{\mathrm{C}}$$

$$\pi_{\mathrm{C}} = 0,2\pi_{\mathrm{A}} + 0,4\pi_{\mathrm{C}}$$

$$\pi_{\mathrm{A}} + \pi_{\mathrm{B}} + \pi_{\mathrm{C}} = 1$$

Resolviendo el sistema se llega a:

$$\pi_{\mathrm{A}} = 0,525; \pi_{\mathrm{B}} = 0,3; \pi_{\mathrm{C}} = 0,175$$

c) La probabilidad que se debe calcular es:

$$\mathbb{P}(Policias\ y\ Ladrones\ en\ misma\ zona)$$

$$= \mathbb{P}(P\ y\ L\ en\ Zona\ A) + \mathbb{P}(P\ y\ L\ en\ Zona\ B) + \mathbb{P}(PyLenZonaC)$$

$$= \pi_{\mathrm{A}}^{\mathrm{lad}}\pi_{\mathrm{A}}^{\mathrm{pol}} + \pi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{lad}}\pi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{pol}} + \pi_{\mathrm{C}}^{\mathrm{lad}}\pi_{\mathrm{C}}^{\mathrm{pol}}$$

$$= 0,38$$

d) La probabilidad de que no estén en la misma zona es que los policías estén en Zona B o en Zona C, i.e.

$$\pi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{pol}} + \pi_{\mathrm{C}}^{\mathrm{pol}} = 0,475$$