Auxiliar 5: Geometría

Fecha: 6 de Septiembre 2017

Resumen:

- Se define el producto cruz entre dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^3$ como:
$$x \times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \hat{k} = R = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$
- $v = x \times y$ es tal que v es perpendicular a x e y, es decir $\langle v, x \rangle = 0$ y $\langle v, y \rangle = 0$.
- $x \times y = -y \times x$, es decir el producto cruz es antisimetrico.
- Para un plano cualquiera $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$, se tiene que $n = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ es un vector normal a Π.

Problemas:

P1. Sea Π un plano y $L \subset \Pi$ una recta que pasa por el plano. Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto cualquiera. Denotamos por R la proyeccion del punto P sobre el plano y por Q la proyeccion ortogonal del punto P sobre la recta. Demuestre que si $R \neq Q$, entonces la recta que pasa por R y Q es perpendicular a L.

P2. (P2 C1-2016-2) Dados un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta L en $\mathbb{R}^3$ consideremos Q la proyeccion de P sobre L. Se define el punto simetrico de P con respecto a L como aquel punto P_s que satisface: Si P esta en L entonces $P_s = Q$, si P no esta en L entonces

$$dist(P, L) = dist(P_s, L) \text{ y ademas } P_s \text{ esta en la recta que pasa por P y Q,}$$

donde $dist(P, L) = \|P - Q\|$ es la distancia de P a la recta L.

a) Demuestre que $P_s = P + 2(Q - P)$

b) Dados $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y la recta L que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene como vector director a $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ calcule Q y P_s

c) Dado el plano Π de ecuacion cartesiana (o normal) $3x - 2y + 5z = 1$, consideramos el conjunto de los puntos simetricos del plano Π, con respecto a la recta L dada en la parte b). Este conjunto de puntos es un plano (no lo pruebe). De una ecuacion de este nuevo plano.

P3. Sean $p, d \in \mathbb{R}^3$ y $d \neq 0$, se define el siguiente conjunto

$$L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - p) \times d = 0\}$$

a) Demuestre que $L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = p + \lambda d \ , \lambda \in \mathbb{R}\}$, osea que L es una recta.

b) Sea $n \in \mathbb{R}^3$, $n \neq 0$, que condiciones deben satisfacer p,d y n para que:
$L = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x - p) \times d = 0\}$, $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = 0\}$, sean subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ tales que $L \cap \Pi = \phi$

Propuestos

P4. Demuestre que dos planos Π_1, Π_2 son paralelos si y solo si son de la forma:

$$\Pi_1 : Ax + By + Cz = R_1$$

$$\Pi_2 : Ax + By + Cz = R_2$$

con $R_1 \neq R_2$. Luego, calcule la distancia entre estos dos planos.

P5. En $\mathbb{R}^3$ considere los planos $\pi_1 : x + y + z = 3$ y $\pi_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(i) Encuentre la recta L, intersección de π_1 y π_2.

(ii) Encuentre el plano π que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y es perpendicular a L.