DESARROLLO AUXILIAR 7

(i) DEMOSTRAREMOS LA NEGACIÓN, ES DECIR

$$x \in \langle I \rangle \iff I \cup \{x\} \text{ es l.d}$$

EN EFECTO, $I \cup \{x\}$ ES l.d $\iff \exists \alpha_i$ tq, $\alpha_i \neq 0$ PARA ALGUN i y $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$

donde $x_i \in I$ PARA $i \in \{1, .., n\}$ y $x_{n+1} = x$ (NOSOTROS LO DEFINIMOS ASÍ)

$\iff \exists \alpha_i$, tq $\alpha_i \neq 0$ PARA ALGUN i y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x = 0$

LUEGO, SUPONGAMOS $\alpha_{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow\Leftarrow$

I ES UN conjunto l.i, por lo tanto, por contradicción $\alpha_{n+1} \neq 0$, ENTONCES, LA PROPOSICION ANTERIOR LA podEMOS dividir por α_{n+1}

$\iff \exists \alpha_i$, tq $\alpha_i \neq 0$ PARA ALGÚN i y $x = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i x_i}{\alpha_{n+1}}$

$\iff x \in \langle I \rangle$ //

(ii) Aplicando el método visto en clase, debemos considerar una matriz con los vectores en sus columnas, pivotearla y luego diremos que las columnas que están en los pivotes son las columnas de los vectores l.i en el conjunto

Entonces:

$$a)\quad M=\begin{pmatrix}1&3&0&2\\2&-1&7&-3\\1&-1&4&-2\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&-7&7&-7\\0&-4&4&-4\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&3&0&2\\0&-7&7&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\tilde{M}$$

Entonces, las columnas (1) y (2) de M, son los vectores l.i de A

$$\Rightarrow\quad \tilde{A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$ es un conjunto l.i que genera el mismo conjunto de A

b) Para encontrar una base, debemos encontrar un conjunto l.i. que genere lo mismo que B, entonces debemos hacer lo mismo que en la parte (a)

$$M=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\1&0&2&-3\\0&1&1&2\\2&3&7&1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-2&-2&-4\\0&1&1&2\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&-2&-2&-4\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\tilde{M}$$

Entonces, las columnas (1), (2) y (4) de M, son los vectores l.i de B

$$\Rightarrow\quad \tilde{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$ es base de $\langle B\rangle$

Ahora, para completar la base, necesitamos un vector l.i más, debido a que la dimensión de $\mathbb{R}^4$ es 4 (y ya tenemos 3 vectores l.i)

Para encontrar ese vector la idea es usar la proposición demostrada en (i)

$$\text{Si } x \notin \langle \tilde{B} \rangle \Rightarrow \tilde{B} \cup \{x\} \text{ es l.i} \Rightarrow \tilde{B} \cup \{x\} \text{ es base de } \mathbb{R}^4$$

$$\text{Ahora } x \notin \langle \tilde{B} \rangle \Leftrightarrow \nexists\, \alpha_i \text{ tq } x = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo cual nos deja con la necesidad de adivinar algún vector. Aquí hay que ir probando con distintos vectores (siempre es recomendable probar con los vectores canónicos)

Se ve que $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ satisface que $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 = \alpha_1 - 3\alpha_3 \\ 0 = \alpha_2 + 2\alpha_3 \\ 0 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 3\alpha_3 \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 \end{array} \rightarrow 0 = \cancel{6\alpha_3} + \cancel{6\alpha_3} + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow\ !1 = 0! \Rightarrow x \notin \langle \tilde{B} \rangle \Rightarrow \tilde{B} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ es l.i}$$

$$\Rightarrow V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ es base de } \mathbb{R}^4$$

P2 a) Demostrando la equivalencia directa; por definición:

B es base $\Leftrightarrow$ B es l.i y $\langle B\rangle = E$

$\Leftrightarrow$ B es l.i y $\forall x\in E, \exists \alpha_i$, $x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i$ $\left\{ \begin{array}{l} x \text{ es combinación} \\ \text{lineal de } b_i. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$ B es l.i y $\forall x\in E, \exists \alpha_i$, $x - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = 0$

(!) $\Leftrightarrow$ B es l.i y $\forall x\in E$ $\{x\}\cup B$ es l.d

$\Leftrightarrow$ B es l.i maximal

Respecto de (!), puede que no sea claro la equivalencia debido a que no necesariamente podemos subir, por lo que se hace necesario demostrarlo
En efecto,

B es l.i y $\forall x\in E$ $\{x\}\cup B$ es l.d.

$\Rightarrow$ B es l.i y $\forall x\in E$ $\exists (\beta_i)$, $\beta_i \neq 0$ para algún i, $\sum_{i=1}^{n}\beta_i b_i + \beta_{n+1} x = 0$

$\Rightarrow$ $\beta_{n+1}\neq 0$, porque si $\beta_{n+1}=0$ tendríamos $\sum_{i=1}^{n}\beta_i b_i = 0$

con algún $\beta_i \neq 0$ lo cual contradice el hecho de que B es un conjunto l.i

Ahora, como $\beta_{n+1}\neq 0$ podemos dividir por el

$\Rightarrow$ $x + \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\beta_{n+1}}\cdot b_i = 0$, entonces, si $\alpha_i = \frac{-\beta_i}{\beta_{n+1}}$

$\Rightarrow$ B es l.i y $\forall x\in E$, $\exists \alpha_i$, $x - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i b_i = 0$

Como la otra implicancia es sencilla, se tendría la equivalencia.

b) Ahora demostraremos por doble implicancia. Para ello, primero demostraremos el hint

Si B es l.d $\iff \exists \alpha_i, i \in [1:n]$ $\alpha_i \neq 0$ para algún i tq $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0$

Luego, sin pérdida de generalidad $\alpha_k \neq 0 \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i b_i + \alpha_k b_k$

$$\Rightarrow b_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{\alpha_i b_i}{\alpha_k}$$

$$x \in \langle B \rangle \iff x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i b_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i b_i + \beta_k b_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \beta_i b_i - \frac{\beta_k}{\alpha_k} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i b_i$$

$$\Rightarrow x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\beta_i - \frac{\beta_k \alpha_i}{\alpha_k}\right) b_i \Rightarrow x \in \langle B \setminus \{b_k\} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle B \rangle \subseteq \langle B \setminus \{b_k\} \rangle$$

Como $\langle B \setminus \{b_k\} \rangle \subseteq \langle B \rangle$ por tener un elemento menos concluimos que:

$$\langle B \rangle = \langle B \setminus \{b_k\} \rangle$$

Continuando, demostramos que B es generador minimal $\iff$ B es base

$\Rightarrow$) Si B es generador minimal $\langle B \rangle = E$ y $\forall x \in B$ $\langle B \setminus \{x\} \rangle \neq E$

Luego, si B fuera l.d, por la demostración anterior $\exists x \in B$, $\langle B \rangle = \langle B \setminus \{x\} \rangle = E$ lo cual es una contradicción

$\Rightarrow B$ es l.i $\Rightarrow B$ l.i y $\langle B \rangle = E \Rightarrow B$ es base

$\Leftarrow$ Si B es base, $E = \langle B \rangle$ y B es l.i

$\Rightarrow \langle B \rangle = E$ y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

Luego, si tomamos $b_k \in B$ arbitrario

Como B es l.i, $\forall \alpha_i$, $b_k \neq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i b_i \Rightarrow b_k \notin \langle B \setminus \{b_k\} \rangle$

$\Rightarrow \langle B \setminus \{b_k\} \rangle \neq E$ (porque $b_k \in E$)

$\Rightarrow$ B es generador minimal

c) Primero, debemos definir bien a que nos referimos:

$E = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle \iff E = \langle b_1 \rangle + \langle b_2 \rangle + \dots + \langle b_n \rangle$

y además la descomposición de un elemento de E es única

Ahora, si $x \in E \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$ (porque B base $\Rightarrow \langle B \rangle = E$)

$\Rightarrow x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n \Rightarrow x \in \langle b_1 \rangle + \langle b_2 \rangle + \dots \langle b_n \rangle$

Con esto tenemos $E \subseteq \langle b_1 \rangle + \langle b_2 \rangle + \dots + \langle b_n \rangle$
y como E es el espacio entero todos conjuntos son subconjuntos de E, con lo que concluimos que:

$E = \langle b_1 \rangle + \langle b_2 \rangle + \dots + \langle b_n \rangle$

Luego, solo queda demostrar que la descomposición es única. Por contradicción, supongamos que no es única

$\Rightarrow \exists x \in E$ tq $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' b_i$ donde almenos un coeficiente es distinto. Entonces, restando obtendríamos

$0 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \alpha_i') b_i}_{\text{Al menos un término} \neq 0} \Rightarrow b_i$ no son l.i $\Rightarrow$ B no es base $\Rightarrow\Leftarrow$

Se concluye que la descomposición es única $\Rightarrow E = \langle b_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle b_n \rangle$

P_3

a) $p(1)=0 \Rightarrow p(x)=(x-1)\,h(x)$ ($h(x)$ un polinomio de grado ≤ 2)

$\Rightarrow p'(x)=(x-1)h'(x)+h(x)$, como $p'(1)=0$ p' es factorizable por $(x-1)$

$\Rightarrow p'(x)=(x-1)(h'(x)+g(x))$ es decir $h(x)=(x-1)\,g(x)$

$\Rightarrow p(x)=(x-1)^2 g(x)$ con $g(x)$ un polinomio de grado ≤ 1

$\Rightarrow p(x)=(x-1)^2(\alpha_1 x+\alpha_2)$

Luego, $p(x)=\alpha_1(x^2-2x+1)x+\alpha_2(x^2-2x+1)$

$\Rightarrow U=\langle\{x^3-2x^2+x,\ x^2-2x+1\}\rangle$ y como son dos polinomios l.i

$\{x^3-2x^2+x,\ x^2-2x+1\}$ es base de $U \Rightarrow \dim(U)=2$

b) Basta con encontrar dos polinomios l.i a los anteriores, los cuales son x^3, x^2 pues

$$\alpha_1 x^3+\alpha_2 x^2+\alpha_3(x^3-2x^2+x)+\alpha_4(x^2-2x+1)=0$$

$\Rightarrow \alpha_4=0 \Rightarrow \alpha_3=0 \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=0$

Aquí, usamos el ojimetro para completar bases

c) i) $p(x)\in P_3(\mathbb{R}) \Rightarrow p(x)=\alpha_3x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0$

$\Rightarrow p''(x)=6\alpha_3x+2\alpha_2$

Luego $p(x)\in W \Rightarrow p''(0)=0 \Rightarrow \alpha_2=0 \Rightarrow p(x)=\alpha_3x^3+\alpha_1x+\alpha_0$

$\Rightarrow W=\langle\{x^3, x, 1\}\rangle \Rightarrow \{x^3,x,1\}$ es base de W y $\dim(W)=3$

ii) Como vimos, $p(x) \in U \Rightarrow p(x) = (x-1)^2(\alpha_1 x + \alpha_0)$

$$y \quad p(x) \in W \Rightarrow p(x) = \beta_3 x^3 + \beta_1 x + \beta_0$$

$$\Rightarrow p(x) \in U \cap W \iff p(x) = (x-1)^2(\alpha_1 x + \alpha_0) \wedge p(x) = \beta_3 x^3 + \beta_1 x + \beta_0$$

$$\Rightarrow p(x) = \alpha_1 (x^3 - 2x^2 + x) + \alpha_0 (x^2 - 2x + 1) = \beta_3 x^3 + \beta_1 x + \beta_0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_3 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_0 \Rightarrow p(x) = \alpha_1 (x^3 - 2x^2 + x) + 2\alpha_1 (x^2 - 2x + 1)$$
$$= \alpha_1 (x^3 - \cancel{2x^2} + x + \cancel{2x^2} - 4x + 2)$$
$$= \alpha_1 (x^3 - 3x + 2)$$

$\Rightarrow U \cap W = \langle \{x^3 - 3x + 2\} \rangle \Rightarrow \{x^3 - 3x + 2\}$ es base de $U \cap W$

iii) Basta con ver que $x^3 - 2x^2 + x$ es l.i con $x^3, x, 1$

$\Rightarrow$ Al menos tenemos un conjunto de 4 polinomios l.i

$\Rightarrow$ Pero $\dim(P_3(\mathbb{R})) = 4 \Rightarrow U + V = P_3(\mathbb{R})$

Una forma más detallada de verlo es que para $p(x) \in P_3$

$$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_3 x^3 + a_2 (x^2 - 2x + 1) + x(a_1 + 2a_2) + (a_0 - a_2)$$

$$\iff p(x) = \underbrace{a_2 (x^2 - 2x + 1)}_{\in U} + \underbrace{a_3 x^3 + (a_1 + 2a_2)x + (a_0 - a_2)}_{\in W}$$

$$\iff p(x) \in U + W$$

Lo cual permite concluir que $U + W = P_3(\mathbb{R})$