MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Pablo Arratia
Rodrigo Maulen - Angelo Muñoz
Fecha: 24 de octubre 2017

Auxiliar 10

Resumen

- **Teorema de la Función Impícita:** Sea $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de clase C^k y sea $(x_0, z_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tal que:

  1. $F(x_0, z_0) = 0$
  2. $\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(z_1,\ldots,z_m)}(x_0, z_0) \neq 0$

  Entonces se tiene que existe una única función $\varphi : U_{x_0} \to V_{z_0}$ (donde U_{x_0} es una vecindad de x_0 y V_{z_0} es una vecindad de z_0) de clase $\mathcal{C}^k$. Además:

$$J_\varphi(x) = -[J_{F_z}(x, z)]^{-1} J_{F_x}(x, z)$$

  Obs. En particular, para $m = 1$ se tiene: (para $z = g(x)$)

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial F(x_0,z_0)}{x_i}}{\frac{\partial F(x_0,z_0)}{\partial z}}$$

- **Teorema de la Función Inversa:** Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$ y $x_0 \in A$ tal que J_F sea invertible (i.e. $|J_F(x_0)| \neq 0$). Entonces, existe una vecindad $U_{x_0} \subseteq A$ tal que:

  1. $V = F(U_{x_0})$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$
  2. $F|_{U_{x_0}} : U_{x_0} \longrightarrow V$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$
  3. Para cada $x \in U_{x_0}$ se cumple:

$$J_{F^{-1}}(F(x)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x) & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}^{-1} = (J_F(x))^{-1}$$

P1. Considere un cambio de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = T(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x} \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}, \text{ con } = \begin{cases} 0 < x < \infty \\ 0 < y < \infty \end{cases}$$

i) Suponiendo que esta tranformación es inyectiva, calcule J_T y $J_{T^{-1}}$ según el Teorema de la Función Inversa, en los puntos donde exista.

ii) Calcular T^{-1} analíticamente y comprobar que su jacobiano coincide con el $J_{T^{-1}}$ encontrado en la parte anterior.

P2. Calcúlese la recta tangente en el punto $(1,1,1)$ a la curva de intersección de las superficies siguientes:

$$x^2+y^2+z^2 = 3$$
$$2x^2-y^2-z = 0$$

P3. Considere las ecuaciones:

$$u+v+x^2-y^2+z^2 = 0$$
$$v^2+u^2+u-2xyz = 0$$

Ocupando el TFI en un entorno del punto $(0,0,0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ vea si se puede definir implícitamente a las variables u y v en función de (x,y,z). Además, encuentre $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$,$\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial v}{\partial z}$ según el teorema.

P4. Considere las ecuaciones:

$$xz^3+2xy+y^2w^2 = 0$$
$$xywz = 1$$

Ocupando el TFI en un entorno del punto $(-1,1,-1,1)$, vea si se puede definir implícitamente a las variables :

- z y w en función de (x,y). Si es así, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ según el teorema.
- x e y en función de (z,w). Si es así, encuentre $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}$ según el teorema.
- x e z en función de (y,w). Si es así, encuentre $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ y $\frac{\partial z}{\partial w}$ según el teorema.
- x e w en función de (z,y). Si es así, encuentre $\frac{\partial x}{\partial z}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ según el teorema.
- z e y en función de (x,w). Si es así, encuentre $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ y $\frac{\partial y}{\partial w}$ según el teorema.

- w e y en función de (z,x). Si es así, encuentre $\frac{\partial w}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$ y $\frac{\partial y}{\partial x}$ según el teorema.

P5. Considere el cambio a **coordenadas esféricas** en $\mathbb{R}^3$ que se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} rsen(\theta)cos(\phi) \\ rsen(\theta)sen(\phi) \\ rcos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ con } = \begin{cases} 0 < r < \infty \\ 0 < \theta < \pi \\ 0 \leq \phi < 2\pi \end{cases}$$

Resuelva los mismos apartados del problema **P1**.