MA2002-4 Cálculo avanzado y aplicaciones
Profesor: Claudio Muñoz - Hector Olivero
Auxiliares: Matías Rojas - Dasla Pando - Edgardo Matthies
Semestre Primavera 2017

Auxiliar 10

Preparación control 2

Fecha: 24 de Octubre, 2017

P1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = e^{-z^2}$ y $b > 0$. Integre dicha función en un dominio adecuado y pruebe las siguientes igualdades:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx)dx = e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin(2bx)dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{y^2} dy$$

P2. Considere el polinomio $p(z) = (z + (1 + i))(z + (1 - i))$. El objetivo es calcular $I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)} dt$

- Muestre que $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z + (1 + i)} + \dfrac{1}{z + (1 - i)}$
- Para la curva Γ_R formada por los arcos regulares $L_R = [-iR, iR]$ y la semicircunferencia $S_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, Re(z) < 0\}$ muestre que:

$$\int_{\Gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 4\pi i$$

  Cuando R es muy grande
- Muestre que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{z + (1 + i)} dz = \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{1}{z + (1 - i)} dz = \pi$$

- Calcule el valor de I.

P3. Sea $f(z) = \dfrac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}$

- Indique donde f es holomorfa, encuentre sus polos y determine sus ordenes.
- Calcule los residuos de los polos de f.
- Considere el borde del cuadrado C_N de vértices $(N + \frac{1}{2})(-1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 - i)$, $(N + \frac{1}{2})(1 + i)$ y $(N + \frac{1}{2})(-1 + i)$, con $N \in \mathbb{N}$.
  - Calcule $\int_{\partial C_N} f(z)dz$
  - Concluya el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

  Indicación: Use sin demostrar que $|\operatorname{cotg}(\pi z)| < M, \forall z \in \partial C_N, N \in \mathbb{N}$