PAUTA AUXILIAR 10

P1 ■ LA IDEA ES QUE PODEMOS CALCULAR INTEGRALES "FEAS" DEL PLANO REAL MEDIANTE LA AYUDA DE INTEGRALES EN EL PLANO COMPLEJO, PARA ESTO BASTA CON ESCOGER UN CAMINO ADECUADO DONDE INTEGRAR.

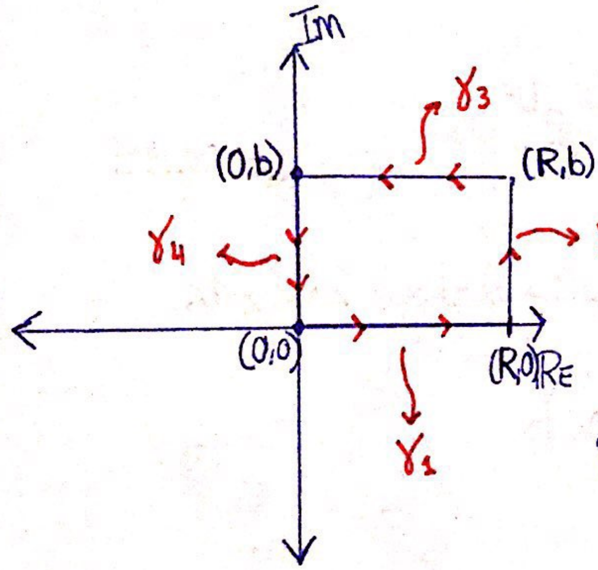
PARA ESTE CASO EN PARTICULAR HAY QUE NOTAR QUE $f(z) = e^{-z^2}$ ES HOLOMORFA EN TODO $\mathbb{C}$, (BASTA CON ENCONTRAR SU SERIE DE POTENCIAS)

ESTO IMPLICA QUE PARA CUALQUIER CURVA

γ CERRADA, SIMPLE Y REGULAR EN $\mathbb{C}$ $\rightarrow$ $\oint_\gamma e^{-z^2}\,dz = 0$ (*)

(POR CAUCHY-GOURSAT)

$\rightarrow$ CONSIDEREMOS EL CAMINO MÁS "APAÑADOR", UN RECTÁNGULO



. DONDE $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

¿POR QUÉ ES APAÑADOR? COMO R ES ARBITRARIO, BASTA CON TENDER A INFINITO DICHO RADIO Y CIERTAS INTEGRALES A CALCULAR IRÁN HASTA INFINITO, QUE SE PARECE BASTANTE A LO QUE QUEREMOS.

POR (*) $\rightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz = 0$. PARAMETRIZEMOS LAS CURVAS $\rightarrow$

$\gamma_1 : \overset{A}{[0,R]} \to x \in A$ (NOS MOVEMOS POR LA LINEA INFERIOR)

$\gamma_2 : \overset{B}{[0,b]} \to R + i \cdot y,\ y \in B$ (Nos paramos en R y subimos)

$\gamma_3 : \overset{C}{[R,0]} \to x + i \cdot b,\ x \in C$ (Nos paramos en (R,b) y vamos a la izquierda)

$\gamma_4 : \overset{D}{[b,0]} \to i \cdot y,\ y \in D$ (Nos paramos en (0,b) y bajamos)

ASÍ OBTENEMOS:

$$\underbrace{\int_0^R e^{-x^2} dx}_{1} + \underbrace{\int_0^b e^{-(R+iy)^2} \cdot i\,dy}_{2} + \underbrace{\int_0^R -e^{-(x+ib)^2} dx}_{3} - \underbrace{\int_0^b e^{y^2} i\,dy}_{4} = 0$$

→ COMO LA IDEA ES INTEGRAR SOBRE UN GRAAN RECTÁNGULO HAY QUE TOMAR $\lim\limits_{R \to \infty}$

PARA 1 $\quad \lim\limits_{R\to\infty} 1 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ → ESTO NOS SIRVE.

PARA 3 $\quad \lim\limits_{R\to\infty} 3 = -\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot e^{-2ixb} \cdot e^{b^2} dx$

$$= -\int_0^\infty e^{b^2} \cdot e^{-x^2} (\cos(2xb) - i\,\text{SEN}(2xb))\,dx$$ → NOS SIRVE!!

PARA 4 NADA QUE HACER, NO DEPENDE DE R.

ASÍ QUE FALTA SOLO ANALIZAR 2

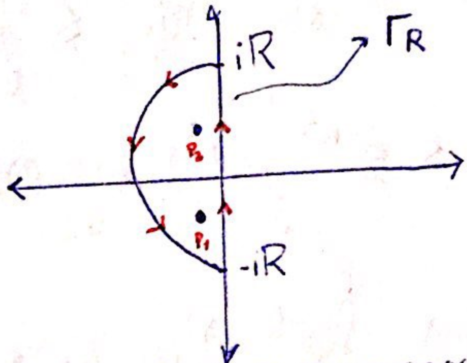
~~$e^{i\pi}$ $e^{-i\theta}$ $= \cos(-\theta) + i\,\text{sen}(-\theta)$ $\cos(\theta) - i\,\text{sen}(\theta)$~~

P2 $p(z) = (z+\underbrace{(1+i)}_{-p_1})(z+\underbrace{(1-i)}_{-p_2}) = (z-p_1)(z-p_2)$

a) $p'(z) = (z-p_2)+(z-p_1)$

$$\Rightarrow \frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{(z-p_2)+(z-p_1)}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{1}{z-p_1}+\frac{1}{z-p_2} \equiv \frac{1}{z+(1+i)}+\frac{1}{z+(1-i)}$$

b) DIBUJEMOS Γ_R $\rightarrow$



PERO $\frac{p'(z)}{p(z)}$ NO ES holomorfa EN p_1 y p_2.

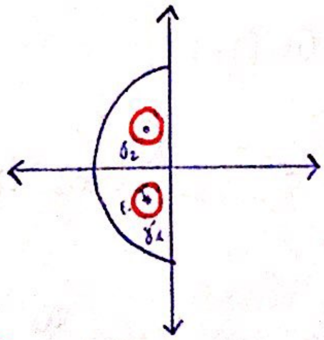
$\therefore$ ADIOS CAUCHY GOURSAT

$\rightarrow$ USANDO TEOREMA DE LA DEFORMACIÓN, YA QUE ES UNA CURVA CERRADA Y SIMPLE (NO CORTA AL MISMO PUNTO MÁS DE UNA VEZ)

$$\boxed{\oint_{\Gamma_R} f(z)dz = \sum_{i=1}^{2}\oint_{\gamma_i} f(z)dz}$$

LUEGO γ_i ES LA CURVA QUE ENVUELVE p_i PARA UN RADIO $\varepsilon \ll 1$.

$$\rightarrow \oint_{\Gamma_R} f(z)dz = \underbrace{\oint_{\gamma_1} f(z)dz}_{①} + \underbrace{\oint_{\gamma_2} f(z)dz}_{②}$$



PARA ① $\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_1}\frac{dz}{z-p_1} + \underbrace{\boxed{\oint_{\gamma_1}\frac{dz}{z-p_2}}}_{=0}$ (POR CAUCHY GOURSAT)

$$\rightarrow \oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_1}\frac{dz}{z-p_1}$$

PARAMETRIZANDO: $z(\theta) = \varepsilon \cdot e^{i\theta}+p_1 \,,\ \theta\in[0,2\pi[$

$dz = i\varepsilon \cdot e^{i\theta}d\theta$

DESARROLLANDO UN POCO ②

$$\int_0^b e^{-R^2}\cdot e^{-2iRy}\cdot e^{y^2}\,dy = \int_0^b e^{-R^2}\cdot e^{y^2}\left(\cos(2yR) - i\,\text{sen}(2yR)\right)dy$$

ANALIZANDO PARTE REAL E IMAGINARIA NOTEMOS QUE:

$$\left|\int_0^b e^{-R^2}\cdot e^{y^2}\cos(2yR)\,dy\right| \leq \int_0^b \left|e^{-R^2}\cdot e^{y^2}\cos(2yR)\right| dy$$

$$\leq e^{-R^2}\int_0^b e^{y^2}\underbrace{|\cos(2yR)|}_{\leq 1}dy \leq e^{-R^2}\int_0^b e^{y^2}dy \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_0^b e^{-R^2}\cdot e^{y^2}\cos(2yR)\,dy = 0$$

y PARA LA PARTE IMAGINARIA ANÁLOGO

$$\left|\int_0^b e^{-R^2}e^{y^2}\,\text{sen}(2yR)\,dy\right| \leq e^{-R^2}\int_0^b e^{y^2}dy \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

POR ENDE NOS QUEDA:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx + -\int_0^\infty e^{b^2}\cdot e^{-x^2}\left(\cos(2xb) - i\,\text{sen}(2xb)\right)dx - \int_0^b i\,e^{y^2}dy = 0$$

$$\to i\int_0^\infty e^{b^2}\cdot e^{-x^2}\cdot\text{sen}(2xb) + \int_0^\infty e^{-x^2}dx = i\int_0^b e^{y^2}dy + \int_0^\infty e^{b^2}e^{-x^2}\cos(2xb)\,dx$$

IGUALANDO PARTE REAL E IMAGINARIA:

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,\text{sen}(2xb)\,dx = e^{-b^2}\int_0^b e^{y^2}dy \quad ; \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2xb)\,dx = e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z-p_1} = \int_0^{2\pi} \frac{\cancel{\varepsilon} i \cancel{e^{i\theta}}}{\cancel{\varepsilon e^{i\theta}} + \cancel{p_1} - \cancel{p_1}} d\theta = 2\pi i$$

- PARA EL CASO DE ② ES ANÁLOGO

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma_R} f(z)dz = 4\pi i \quad , \text{ CON } R \text{ MUY GRANDE}$$

c) EN EFECTO, $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1+i)}$, PARAMETRIZANDO S_R, $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

$dz = iRe^{i\theta}d\theta$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cancel{dz}\, iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta} - p_1} = \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{Rie^{i\theta} - p_1 i + p_1 i}{Rie^{i\theta} - p_1} d\theta$$

$$= i\pi + \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{i p_1 \, d\theta}{Rie^{i\theta} - p_1}$$

PERO $$\left| i\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{p_1}{Rie^{i\theta} - p_1} \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|p_1|}{|Rie^{i\theta} - p_1|}$$

PERO POR DESIGUALDAD TRIANGULAR

$$\left\{ \begin{aligned} &|Re^{i\theta} - p_1| \geq \big||Re^{i\theta}| - |p_1|\big| \\ &\frac{1}{|Re^{i\theta} - p_1|} \leq \frac{1}{|R - |p_1||} \end{aligned} \right.$$

↓

SERÁ MUY GRANDE ∴ SE VA VALOR ABSOLUTO DE DENOMINADOR

$$\leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{|p_1|}{R - |p_1|} = \frac{\pi |p_1|}{R - |p_1|} = \frac{\pi\sqrt{2}}{R - \sqrt{2}} \xrightarrow[R\to\infty]{\theta} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z+(1+i)} = i\pi$$, PARA EL OTRO CASO ES ANÁLOGO

d) QUEREMOS $I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(i\tau)}{p(i\tau)}\,d\tau$

PERO DE b) $\int_{\Gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz = 4\pi i = \int_{L_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz + \int_{S_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz$

① ②

PERO PARA ①, L_R SE PARAMETRIZA : $z = i\tau$, $\tau \in [-R, R]$

$dz = i\,d\tau$

$$\to \int_{L_R} f(z)\,dz = i\int_{-R}^{R} \frac{p'(i\tau)}{p(i\tau)}\,d\tau$$

$$\to \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 4\pi i = i\int_{-R}^{R} \frac{p'(i\tau)}{p(i\tau)}\,d\tau + \int_{S_R} \frac{p'(z)}{p(z)}\,dz$$

TOMANDO $R \to \infty$ LIMITE:

$$4\pi\cancel{i} = \cancel{i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(i\tau)}{p(i\tau)} + 2\pi\cancel{i} \Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(i\tau)}{p(i\tau)}\,d\tau = \boxed{1 = I}$$

P3) $f(z) = \dfrac{\pi \cot(\pi z)}{z^2} \Rightarrow f(z) = \dfrac{\pi \cos(\pi z)}{z^2 \operatorname{sen}(\pi z)}$

- f es holomorfa $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $z \neq 0 \wedge z \neq n \in \mathbb{Z}$
- Polos: $z = 0$ con orden 3
  $z = n \in \mathbb{Z}$ con orden 1 c/u.

- $\operatorname{Res}(f,n) = \lim\limits_{z \to n} \left(\dfrac{(z-n)\pi \cos(\pi z)}{z^2 \operatorname{sen}(\pi z)} \right)$

$$= \left(\lim_{z \to n} \frac{\pi \cos(\pi z)}{z^2} \right) \left(\lim_{z \to n} \frac{(z-n)}{\operatorname{sen}(\pi z)} \right)$$

$$\overset{L'H}{=} \frac{\pi \cos(\pi n)}{n^2} \cdot \lim_{z \to n} \frac{1}{\pi \cos(\pi z)} = \boxed{\frac{1}{n^2}}$$

- $\operatorname{Res}(f,0) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{2} \dfrac{d^2}{dz^2} \left(\dfrac{z^{\cancel{3}} \cdot \pi \cot(\pi z)}{\cancel{z^2}} \right)$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \left(\cot(\pi z) - \pi z \operatorname{cosec}^2(\pi z) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{z \to 0} \left(-2\pi \operatorname{cosec}^2(\pi z) + 2\pi^2 z \operatorname{cosec}^2(\pi z) \operatorname{cotg}(\pi z) \right)$$

$$= \pi^2 \lim_{z \to 0} \left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(\pi z)} + \frac{\pi z \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}^3(\pi z)} \right)$$

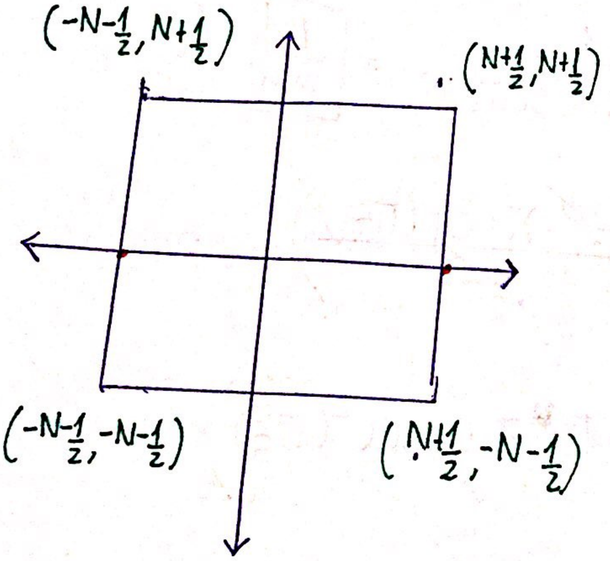
$$= \pi^2 \lim_{z \to 0} \left(\frac{-1 \operatorname{sen}(\pi z) + \pi z \cos(\pi z)}{\operatorname{sen}^3(\pi z)} \right)$$

$$\overset{L'H}{=} \pi^{\cancel{2}} \lim_{z\to 0}\left(\frac{-\pi\cos(\pi z)+\pi\cos(\pi z) - z\pi^2 \operatorname{sen}(\pi z)}{3\operatorname{sen}^2(\pi z)\cos(\pi z)\cancel{\pi}}\right)$$

$$= -\frac{\pi^2}{3}\left(\lim_{z\to 0}\frac{\pi z}{\operatorname{sen}(\pi z)}\right)^{\to 1}\left(\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos(\pi z)}\right)^{\to 1}$$

$$= -\frac{\pi^2}{3} \quad //.$$

• La curva se ve así:



→ Por teorema de los residuos:

$$\int_{\partial C_N} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum \text{Residuos}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial C_N} f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)$$

↓

Queremos que se vaya a 0

$$\to \left|\int_{\partial C_N} f(z)\,dz\right| \le \int_{\partial C_N}\frac{|\pi||\cot(\pi z)|}{|z|^2} \le \pi M\int_{\partial C_N}\frac{dz}{|z|^2}$$

$$\le \frac{\pi M}{(N+\frac{1}{2})^2}\cdot\int_{\partial C_N} dz = \frac{\pi M\cdot 8\cancel{(N+\frac{1}{2})}}{(N+\frac{1}{2})^{\cancel{2}}} = \frac{8\pi M}{(N+\frac{1}{2})} \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

ASÍ, TOMANDO $\lim_{R\to\infty}$ EN AMBOS LADOS

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial C_N} f(z)\,dz = \lim_{N\to\infty} 2\pi i \left(-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\leadsto 0 = \underbrace{2\pi i}_{\neq 0} \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad !!$$