GUÍA Nº2: Integrales de Línea y de Trabajo

CURSO: MA26B-02
PROFESOR: CARLOS CONCA

PREPARADO POR: PAULINA HERRERA, JUAN MAYORGA.

→ Integral de Línea: $\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt \qquad \vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^N$

- $M(\Gamma) = \int_\Gamma \rho\,ds = \int_a^b \rho(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|dt$ (Masa)
- $\vec{x}_b = \left(\frac{1}{M(\Gamma)}\int_\Gamma x\rho\,ds,\ \frac{1}{M(\Gamma)}\int_\Gamma y\rho\,ds,\ \frac{1}{M(\Gamma)}\int_\Gamma z\rho\,ds\right)$ (Centro de Masa)

→ Integral de Trabajo: $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$

Nota: - La integral de línea depende de la trayectoria, en ella f es una función escalar continua, Γ es regular y simple, $\vec{r}$ es suave.
- La integral de trabajo no depende de la trayectoria, en ella $\vec{F}$ es una función vectorial continua, Γ es regular y simple.

$\vec{F}$ **Campo conservativo:** Cuando $\exists\ g: \Omega\subseteq\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, función escalar tal que $\vec{F}=\nabla g$.

→ **TEOREMA:** Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Son equivalentes:

(a) $\exists\ g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$, $\vec{F}=\nabla g$

(b) $\forall$ curva $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^N$, regular y simple por pedazos, cerrada
Se tiene:
$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

(c) $\forall$ par de curvas Γ_1 y Γ_2, regulares y simples por pedazos que comiencen y terminen en puntos iguales, se tiene que:
$$\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}_1 = \int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}_2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

P1. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2+y^2=\frac{z^2}{h^2},\quad h>0$$

de forma tal que la altura $z=z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{cases}\frac{dz}{d\theta}=z\\ z(0)=h\end{cases}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

(i) Bosqueje la curva y demuestre que $\tau/\kappa = h/\sqrt{2}$, donde τ y κ corresponden a la torsión y curvatura de Γ respectivamente.

(ii) Considere el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(\frac{1}{x},\frac{1}{y},-\frac{1}{z^2})$. Sea $\Gamma_0 := \Gamma|_{\theta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})}$, calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0.

(i)

Encontremos $z(\theta)$ primero.
Para ello, tenemos la ecuación diferencial:

$\frac{dz}{d\theta} = z$, cuya condición de borde es $z(0)=h$

$$z = k e^{\theta}, \quad z(0) = k e^{0} = k = h$$

$$\Rightarrow \boxed{z = h e^{\theta}}$$

Sabemos que la curva Γ se encuentra sobre la superficie $\overset{*}{\boxed{x^2+y^2=\frac{z^2}{h^2}}}$

sabemos que:

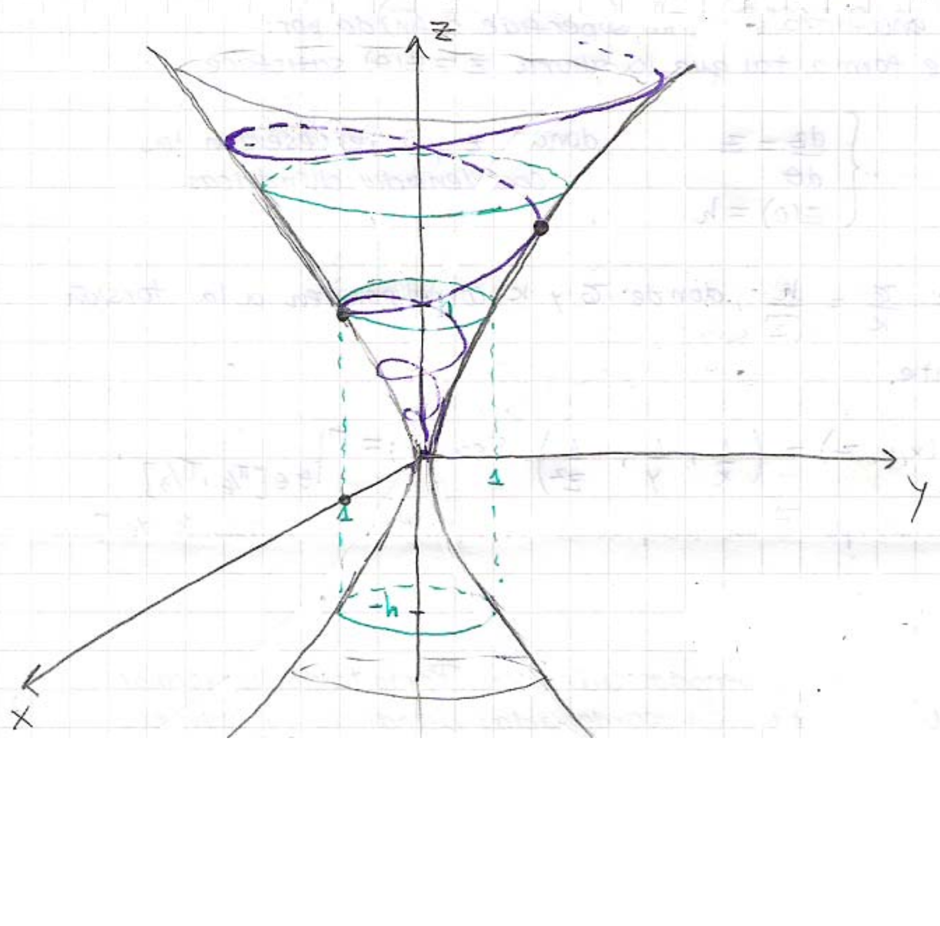
$$x^2+y^2=\rho^2, \quad \text{con } \rho=\rho(\theta)$$

Si todo lo anterior lo reemplazamos en * se llega a:

$$\rho^2 = \frac{h^2 e^{2\theta}}{h^2} \Rightarrow \rho = e^{\theta}$$

Por lo que la parametrización queda como sigue:

$$\vec{r}(\theta): \left(e^{\theta}\cos\theta,\ e^{\theta}\operatorname{sen}\theta,\ h e^{\theta}\right)$$



Después de hacer los cálculos necesarios se llega a:

$$\tau = \frac{h}{(2+h^2)e^{\theta}} \qquad k = \frac{\sqrt{2}}{e^{\theta}(2+h^2)} \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \frac{h}{\sqrt{2}} \quad //$$

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2}\right)$; $\Gamma_0 := \Gamma\Big|_{\theta\in[\pi/6,\pi/3]}$

Si $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \partial g = \frac{\partial x}{x} \Rightarrow g = \ln(x) + C(y,z)$

Si $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln(x) + C(y,z)) = \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \partial C = \frac{\partial y}{y} \Rightarrow C_1(y) = \ln(y) + C_2(z)$

Si $\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{-1}{z^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(\ln(x) + \ln(y) + C_2(z)\right) = -\frac{1}{z^2}$

$\Rightarrow \frac{\partial C_2}{\partial z} = \frac{-1}{z^2} \Rightarrow \partial C_2 = -\frac{\partial z}{z^2} \Rightarrow C_2(z) = \frac{1}{z} + \text{Cte.}$

Luego : $g = \ln(x) + \ln(y) + \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = g(\vec{r}(\theta))\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \pi/3 + \frac{1}{h}\left[\frac{1}{e^{\pi/3}} - \frac{1}{e^{\pi/6}}\right]$$

P2.

Un campo de fuerzas bidimensional $\vec{F}$ está definido por:

$$\vec{F}(x,y) = (x+y)\hat{\imath} + (x-y)\hat{\jmath}$$

Demostrar que el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula a lo largo de una curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$$

con $a \leq t \leq b$, depende únicamente de $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(b)$. Calcular el trabajo cuando $x(a) = 1$, $x(b) = 2$, $y(a) = 3$ e $y(b) = 4$.

Si encontramos g tal $\nabla g = \vec{F}$, entonces el trabajo depende solo $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(b)$.

Encontremos g:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x+y \Rightarrow dg = (x+y)\,dx \Rightarrow g = \frac{x^2}{2} + xy + c(y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2} + xy + c(y)\right) = x + \frac{\partial c}{\partial y} = x - y \Rightarrow c(y) = -\frac{y^2}{2}$$

$$\Rightarrow g = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x+y \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x - y$$

$$W = \int_a^b \vec{F}\cdot d\vec{r} = g(\vec{r}(b)) - g(\vec{r}(a))$$

$$\boxed{W = 3}$$

P3.

Considere una curva regular $\mathcal{C}$ que se mueve en la superficie de una esfera de radio R centrada en el origen del sistema de coordenadas (para fijar ideas, piense en la superficie terrestre y en un gaseoducto representado por $\mathcal{C}$). Si (θ, φ) son los ángulos en coordenadas esféricas que describen $\mathcal{C}$, entonces éstos satisfacen la relación:

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = 1.$$

(i) Sabiendo que $\mathcal{C}$ se inicia en la intersección de la esfera con el eje z para $z \geq 0$ (es decir, en el polo norte) y concluye en un punto que pertenece al plano $z = 0$, determine una parametrización de $\mathcal{C}$ en términos de θ ó φ y bosqueje la curva.

(ii) Determine la masa del gaseoducto, suponiendo que la densidad lineal es

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{R + y}.$$

(iii) Determinar la integral de trabajo para el campo vectorial definido por $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}, 0, -z\right)$, a lo largo de la curva $\mathcal{C}$.

Respuesta:

(i)

$$\begin{cases} x = R\,\text{sen}\,\varphi \cos\theta \\ y = R\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z = R\cos\varphi \end{cases}, \quad \theta\in[0,2\pi[,\ \varphi\in[0,\pi]$$

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = 1 \Rightarrow \theta = \varphi + k \quad , \quad k = kte.$$

$P_I = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$ i.e. cuando $\cos\varphi = 1 \iff \varphi = 0$

$\theta(0) = k$

$\Rightarrow \quad 0 \leq k < 2\pi \qquad (a)$

P_F: Cuando $z=0$ i.e. cuando $\varphi = \pi \Rightarrow \theta(\pi) = \pi + k$

$\Rightarrow \quad -\pi \leq k < \pi \qquad (b)$

Y también, $x(\pi) = y(\pi) = 0$,

así que

$$P_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que por a) y b), $0 \leq k < \pi$.

Luego,

$$\vec{r}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\,\text{Sen}\,\varphi\cdot\text{Cos}(\varphi+k) \\ R\,\text{Sen}\,\varphi\cdot\text{Sen}(\varphi+k) \\ R\,\text{Cos}\,\varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi\in[0,\pi]$$

(ii)

Por facilidad supongamos que $k=0$.

Tenemos que

$$x(\varphi) = \frac{R}{2}\,\text{Sen}\,2\varphi, \qquad x'(\varphi) = R\,\text{Cos}\,2\varphi$$

$$y(\varphi) = R\,\text{Sen}^2\varphi, \qquad y'(\varphi) = 2R\,\text{Sen}\,\varphi\,\text{Cos}\,\varphi = R\,\text{Sen}\,2\varphi$$

$$z(\varphi) = R\,\text{Cos}\,\varphi, \qquad z'(\varphi) = -R\,\text{Sen}\,\varphi$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{d\varphi}(\varphi) \right\| = \left\{ R^2\text{Cos}^2 2\varphi + R^2\text{Sen}^2 2\varphi + R^2\text{Sen}^2\varphi \right\}^{1/2} = R\left\{1+\text{Sen}^2\varphi\right\}^{1/2}$$

$$\rho(\vec{r}(\varphi)) = \sqrt{R + y(\varphi)} = \left\{R + R\,\text{Sen}^2\varphi\right\}^{1/2} = R^{1/2}\left\{1+\text{sen}^2\varphi\right\}^{1/2}$$

(iii)

Luego,

$$M = \int_C \rho \, d\ell = \int_0^{\pi} \rho(\vec{r}(\varphi)) \left\| \frac{d\vec{r}}{d\varphi}(\varphi) \right\| d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} R^{3/2} \{1 + \operatorname{sen}^2\varphi\} \, d\varphi = \int_0^{\pi} R^{3/2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\varphi \right) d\varphi$$

$$= \frac{3}{2}\pi R^{3/2} - \frac{1}{4} \Big[\operatorname{sen} 2\varphi \Big]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi R^{3/2}$$

Ahora $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/z \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$, $\vec{F}(r(\varphi)) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\varphi \\ 0 \\ -R\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi}(\varphi) = \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \\ z'(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\cos 2\varphi \\ R\operatorname{sen} 2\varphi \\ -R\operatorname{sen}\varphi \end{pmatrix}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(\varphi)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi}(\varphi) \cdot d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} \left\{ R \operatorname{sen}\varphi \cos 2\varphi + \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} 2\varphi \right\} d\varphi = \dots$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

P1.

Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$, $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, donde (ρ, θ, z) las coordenadas cilíndricas del punto.

(a) Encuentre una parametrización de la trayectoria Γ descrita por la partícula (use el ángulo θ como parámetro para describir la curva).

Respuesta: $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \cosh\theta)$

(b) Calcule la longitud de Γ si $\theta \in [0, 2\pi]$.

Respuesta: $L(\Gamma) = \sinh(2\pi)$

(c) Calcule los vectores tangente, normal y binormal, así como la curvatura y torsión de Γ.

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= \frac{1}{\cosh\theta}(-\sin\theta, \cos\theta, \sinh\theta) \\
\hat{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}\cosh\theta}(-\cos\theta\cosh\theta + \sin\theta\sinh\theta, -\sin\theta\cosh\theta - \cos\theta\sinh\theta, 1), \\
\hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}\cosh(\theta)}(\cos\theta\cosh\theta + \sin\theta\sinh\theta, \sin\theta\cosh\theta - \cos\theta\sinh\theta, 1), \\
k &= \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2\theta}, \quad \tau = \frac{\sinh\theta}{\cosh^2\theta}
\end{aligned}$$

P2.

¿Conservativo o no conservativo?

Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se define

$$n(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$.

(i) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), -r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $\vec{r}(t) = (r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 4\pi]$.

(iv) Γ es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

Pregunta: ¿ Es $\vec{F}$ un campo conservativo en todo $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$? Dada Γ curva cerrada en torno al origen, a $n(\Gamma)$ se le llama el *número de enrollamiento anti-horario* de Γ. Justifique esta terminología a partir de los ejemplos anteriores.
(b) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (2r - r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 2\pi].$$

Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset I\!R^2 \to I\!R$ tal que $\vec{F}(x,y) = \nabla g(x,y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ. Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.
Indicación: Busque g de la forma

$$g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

y recuerde que $\frac{d}{dt}(\text{arctg})(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
(c) ¿ Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b) ? Justifique.

P3.

Consideremos el campo de fuerzas $\vec{F} = y^2\hat{\imath} + z^2\hat{\jmath} + x^2\hat{k}$.
(i) Calcular la integral de trabajo de $\vec{F}$ a lo largo del triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,a,0)$ y $(0,0,a)$ donde $a > 0$.
Respuesta: $W = \frac{a^3}{3}$
(ii) Calcular el trabajo realizado por esta misma fuerza sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y el cilindro semi-infinito $x^2+y^2-x = 0,\ z \geq 0$. La trayectoria se describe de manera de dejar la región de la esfera que es interior a la curva a la izquierda de un observador que la recorre (*i.e.* sentido anti-horario según $\hat{k}$).
Respuesta: $W = \frac{16}{15} - \frac{\pi}{4}$

P4.

Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña.
(i) Utilizando coordenadas cilíndricas, deducir una parametrización de Γ sabiendo que se satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$ con $a > 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.
Respuesta: $\vec{r}(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, a\theta + 2\pi(1-2a))$

(ii) Sea $\vec{G}(x,y,z) = (y^2/2, y(x+z), y^2/2)$. Encuentre un potencial de $\vec{G}$ y calcule el trabajo de $\vec{G}$ a lo largo de Γ.
Respuesta: $W = 0$
(iii) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (y^2/2, y(x+z), -y^2/2)$. Calcular el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de Γ.

P5.

Encuentre la masa total del alambre parametrizado por

$$\vec{r}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4) \quad \text{con } t \in [0,1]$$

en los siguientes casos:

(i) la densidad en el punto que corresponde a t es t^2;

(ii) la densidad en un punto a una distancia s del origen a lo largo de la curva es $s+1$;

(iii) la densidad en un punto es igual a su distancia al origen medida en $\mathbb{R}^3$.

P6.

Dentro de los siguientes campos vectoriales, sólo uno de ellos es no conservativo, determine cuál de ellos es. Para esto, calcule la integral de trabajo sobre la circunferencia unitaria centrada en el origen, o bien, encuentre un potencial.

(i) $F(x,y) = (3x^2 + 2xy^2 + y, 2x^2y + x + 3y^2)$

(ii) $F(x,y) = (y\cos(x) + \text{sen}(y) + 1, \text{sen}(x) + x\cos(y) + 1)$

(iii) $F(x,y) = (e^x \text{sen}(y) + 1, e^x\cos(y) + 1)$

(iv) $F(x,y) = (2xy + 1, x^2 + 4y)$

(v) $F(x,y) = (x^2, xy^2)$

(vi) $F(x,y) = (15x^4 + 6x^2y^3 + y, 6x^3y^2 + x + 15y^4)$

P7.

Calcular la integral de línea del campo:

$$F(x,y,z) = \left(e^{xz}(xyz^2 + yz), xze^{xz}, e^{xz}(x^2yz + xy)\right)$$

a lo largo de las curvas parametrizadas por:

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\frac{\sinh(5t^4)}{\sinh(5)}, t^4 + 5t^3 - 3t^2 - 2t, \frac{\ln(1+6t^8)}{\ln(7)}\right) \quad \text{con } t \in [0,1]$$

$$\vec{\mu}(t) = \left(\ln(t^2 - t + 1), \text{sen}(t^3 + 3t^2 - 4t), \frac{\cosh(t^5 - t) - 1)}{(t^2 + t + 1)^{\frac{4}{7}}}\right) \quad \text{con } t \in [0,1]$$

OTROS PROBLEMAS RESUELTOS

P1.

1 Considere la curva

$$\Gamma: \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^2, \qquad x, y \geq 0,$$

donde $a > 0$. Encuentre una parametrización de Γ y calcule la longitud de arco correspondiente. ¿Cuál es la parametrización canónica de Γ?

Sol: La forma de Γ nos recuerda la ecuación de la circunferencia de radio $\alpha > 0$ y centrada en el origen:

$$C: \quad x^2 + y^2 = \alpha^2.$$

Si para C hacemos

$$x = \alpha \cos\theta, \qquad \theta \in I = [0, 2\pi[$$

entonces, necesariamente,

$$y = \alpha \operatorname{sen}\theta, \qquad \theta \in I$$

así que

$$C: \quad \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cos\theta \\ \alpha \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, 2\pi[.$$

- Aprovechémonos de este tipo de truco en Γ...

Para $\alpha > 0$ y $I \subseteq \mathbb{R}$ (ambos por definir) ponemos

$$x^{1/3} = \alpha \cos\theta, \qquad \theta \in I,$$

o, lo que es lo mismo

$$x = \alpha^3 \cos^3\theta, \qquad \theta \in I.$$

Entonces tendríamos que

$$y^{2/3} = a^2 - \alpha^2 \cos^2 t, \qquad \theta \in I$$

Por tanto nos conviene escoger $\alpha = a$ y, en virtud de la condición $x, y \geq 0$,

$$I = [0, \pi/2].$$

Luego,
$$\Gamma: \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \cos^3\theta \\ a^3 \operatorname{Sen}^3\theta \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, \pi/2].$$

Ahora, para $\theta \in I$,
$$\dot{x}(\theta) = -3a^3 \cos^2\theta \cdot \operatorname{Sen}\theta$$
$$\dot{y}(\theta) = 3a^3 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta$$
$$\|\vec{v}(\theta)\|^2 = 9a^6 \left(\cos^4\theta \cdot \operatorname{Sen}^2\theta + \operatorname{Sen}^4\theta \cdot \cos^2\theta \right)$$
$$= 9a^6 \operatorname{Sen}^2\theta \cos^2\theta \left(\cos^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta \right)$$
$$\|\vec{v}(\theta)\| \doteq 3a^3 \operatorname{Sen}\theta \cos\theta = \frac{3}{2} a^3 \operatorname{Sen} 2\theta,$$
así que la (función) longitud de arco asociada de $\vec{r}(\cdot)$ es
$$S(\theta) \equiv \int_0^\theta \|v(\tau)\| \, d\tau = \int_0^\theta \frac{3}{2} a^3 \operatorname{Sen} 2\tau \, d\tau$$
$$= \frac{3}{4} a^3 \left\{ \cos 0 - \cos 2\theta \right\} = \frac{3}{4} a^3 \left(1 - \cos 2\theta \right),$$
cuando $\theta \in [0, \pi/2]$.

En particular,
$$L(\Gamma) = S(\pi/2) = \frac{3}{2} a^2$$

La fórmula sirve pues "Γ es regular en su interior".
Por ejemplo,
$$\|v(\theta)\| > 0, \quad \forall\, \theta \in]0, \pi/2[.$$
pero $\|v(0)\| = \|v(\pi/2)\| = 0$.

Ahora,
$$\begin{cases} s = \frac{3}{4}a^3\left(1-\cos 2\theta\right), & \theta \in [0, \pi/2] \\ \theta = \arccos\left(1-\frac{4}{3}\frac{s}{a^3}\right), & s \in [0, \frac{3}{2}a^2] \end{cases}$$

Calculemos, para $s \in [0, \frac{3}{2}a^2]$

$$x_1(s) = x(\theta(s)) = a^3\left(1-\frac{4}{3}\frac{s}{a^3}\right)^3$$

$$y_1(s) = y(\theta(s)) = a^3\left\{\operatorname{sen}\arccos\left(1-\frac{4}{3}\frac{s}{a^3}\right)\right\}^3$$

$$= a^3\left(1-\left(1-\frac{4}{3}\frac{s}{a^3}\right)^2\right)^{3/2}$$

Luego, la parametrización canónica de Γ es

$$\Gamma: \vec{r}_1(s) \equiv \vec{r}(\theta(s)) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ y_1(s) \end{pmatrix}$$

P2.

Calcule $\vec{T}$ cuando $x = y$

Sol. La condición $x = y$ implica que

$$y = x = \left(\frac{a^2}{2}\right)^{3/2} = \frac{a^3}{\sqrt{8}}$$

Conforme a la parametrización $\vec{r}(\,)$ esto corresponde a $\theta = \pi/4$
En el caso canónico, $s = \frac{3}{4}a^3$.

Primera forma.-

$$\vec{T}(\pi/4) = \frac{\vec{v}(\pi/4)}{\|\vec{v}(\pi/4)\|} = \frac{2}{3a^3}\begin{pmatrix} -3a^3\left(\sqrt{2}/2\right)^3 \\ 3a^3\left(\sqrt{2}/2\right)^3 \end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot\frac{2^{3/2}}{2^3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Segunda forma.-

$$\vec{T}_1\left(\frac{3}{4}a^3\right) = \frac{d\vec{r}_1}{ds}\left(\frac{3}{4}a^3\right) = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{ds}\left(\frac{3}{4}a^3\right) \\ \frac{dy_1}{ds}\left(\frac{3}{4}a^3\right) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

P3.

Parametrizar la curva cuyos puntos satisfacen lo siguiente: "el producto de las distancias a $(a,0)$ y $(-a,0)$ es constante e igual a $b \geq a^2$".

Sol.-

Denotemos por $C \subseteq \mathbb{R}^2$ a la curva en cuestión.

Sea $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C$, cualquiera. Notemos $Q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $R = -Q$

Entonces,

$$\underbrace{d(P,Q) \cdot d(P,R)}_{} = \left((x-a)^2+y^2\right)^{1/2} \cdot \left((x+a)^2+y^2\right)^{1/2} = b$$

Puesto que P fue tomado arbitrariamente,

$$C: \quad \left[(x-a)^2+y^2\right]^{1/2} \cdot \left[(x+a)^2+y^2\right]^{1/2} = b \qquad (0)$$

La forma en que está dada C nos hace pensar en coordenadas polares.

Para $\alpha > 0$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ (ambos por definir) ponemos

$$\begin{cases} x = \alpha \cos\theta \\ y = \alpha \operatorname{sen}\theta \end{cases}, \qquad \theta \in I \qquad (1)$$

Reemplazando (1) en (0),

$$\left(\alpha^2+a^2\right)^2 - 4a^2\alpha^2\cos^2\theta = b^2 \qquad (2)$$

Ahora usando la fórmula

$$\cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$$

en (2) obtenemos

$$\left(\alpha^2+a^2\right)^2 - 4a^2\alpha^2\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) = b^2$$

i.e.,

$$\alpha^4 + a^4 - 2a^2\alpha^2\cos 2\theta = b^2$$

Si $b = a^2$, $\quad \alpha^2 = 2a^2\cos 2\theta.$

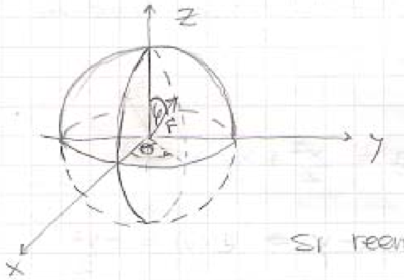
P4.

(a) Considere el campo vectorial dado por $\vec{F}(x,y,z) = (y-z)\hat{\imath} + (z-x)\hat{\jmath} + (x-y)\hat{k}$
Definamos la curva Γ como la intersección entre la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el plano $y = x\tan(\alpha)$, donde $a>0$ y $0<\alpha<\pi$
Encuentre una parametrización para la curva Γ y demuestre que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a lo largo de ella es:

$$\pm 2\pi\sqrt{2}\, a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$, de una interpretación para el signo.

Indicación: En un sistema de coordenadas esféricas puede considerar $\varphi\in[0,2\pi]$ y $\theta\in[0,\pi]$

En coordenadas esféricas, la esfera se puede definir: $x^2+y^2+z^2=a$ $*$



$\vec{r} = (x,y,z)$

$x = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$
$y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$
$z = r\cos\varphi$

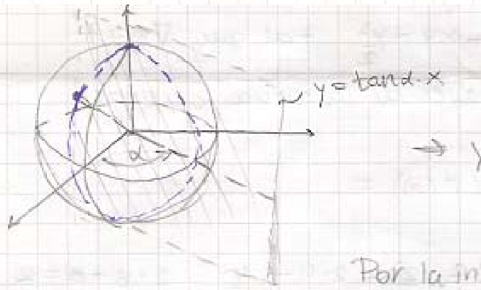
Si reemplazamos en $*$ queda:

$$r^2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta + r^2\cos^2\varphi = r^2\operatorname{sen}^2\varphi + r^2\cos^2\varphi = a^2$$

$$\Rightarrow r = a$$

$\Rightarrow x = a\operatorname{sen}\varphi\cos\theta,\ y = a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta,\ z = a\cos\varphi$

Si intersectamos la esfera con el plano $y = \tan(\alpha)\cdot x$ encontraremos la curva



Para encontrar la parametrización de la curva, debemos reemplazar x e y de la esfera en la ecuación del plano

$$\Rightarrow y = x\tan\alpha \Rightarrow a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta = a\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\cdot\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = \alpha$$

Por la indicación, se puede fijar $\theta=\alpha$ y $\varphi\in[0,2$
Así recorreríamos toda la curva
Luego, un punto de la curva en función de un parámetro φ, es decir, la parametrización de la curva es:

$$\vec{r} = (a\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha,\ a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha,\ a\cos\varphi) \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

$$W = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(\varphi))\cdot\vec{r}\,'(\varphi)\,d\varphi$$

$$\vec{F} = (a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha - a\cos\varphi,\ a\cos\varphi - a\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha,\ a\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha - a\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha)$$

$$\vec{r}\,'(\varphi) = (a\cos\varphi\cos\alpha,\ a\cos\varphi\operatorname{sen}\alpha,\ -a\operatorname{sen}\varphi)$$

$$\vec{F}\cdot\vec{r}\,' = a^2[\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha - \cos^2\varphi\cos\alpha + \cos^2\varphi\operatorname{sen}\alpha - \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \operatorname{sen}^2\varphi\cos\alpha + \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}\alpha]$$

$$\boxed{\vec{F}\cdot\vec{r} = a^2(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)} \qquad W = \int_0^{2\pi}\vec{F}\cdot\vec{r} = a^2(\operatorname{sen}\alpha-\cos\alpha)\cdot 2\pi$$

$$\operatorname{sen}(\pi/4-\alpha) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \Rightarrow W = -\sqrt{2}a^2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cdot 2\pi \text{ si } 0\to 2\pi$$

$$W = +\sqrt{2}a^2\operatorname{sen}(\pi/4-\alpha)\cdot 2\pi \text{ si } 2\pi\to 0$$

(b) Sea $\vec{F}(x,y) = cxy\,\hat{\imath} + x^6y^2\,\hat{\jmath}$, con $c>0$, un campo de fuerzas que actúa sobre una partícula, la cual debe moverse desde el origen del sistema de coordenadas hasta la recta $x=1$ a lo largo de una curva de la forma:

$$y = ax^b, \text{ donde } a,b>0$$

Encuentre un valor de a (en términos de c) tal que el trabajo hecho por esta fuerza, es independiente de b.

$$\int_{\Gamma_0} \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{\sigma}'(x)\,dx = \int_0^1 (cx\cdot ax^b,\ x^6a^2x^{2b})\cdot(1,\ bax^{b-1})\,dx$$

$$= \int_0^1 (cax^{b+1} + a^3b\,x^{3b+5})\,dx = \left[\frac{ca}{b+2}\,x^{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6}\,x^{3b+6}\right]\Big|_0^1$$

$$= \frac{ca}{b+2} + \frac{a^3b}{3b+6} = \frac{3ca+a^3b}{3(b+2)}$$

Para que sea independiente de b.

$$3ca + a^3b = a^3(b+2)$$

$$\Rightarrow 3ca + a^3b = a^3b + 2a^3$$

$$\Rightarrow 3ca = 2a^3$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{3c}{2} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3c}{2}}}$$

P5.

Considere la curva Γ que se mueve sobre la superficie del paraboloide de ecuación $x^2+y^2-z=0$, tal que los parámetros ρ y θ en coordenadas cilíndricas que describen esta curva, satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\rho \text{ , con condiciones iniciales } \rho(0)=1 \text{ , } \frac{d\rho}{d\theta}(0)=-1$$

$$\theta \in [0,\infty)$$

(i) De una parametrización para la curva en términos del parámetro θ y bosqueje la curva.

(ii) Dado el campo vectorial $\vec{F}(x,y,z)=(z(1+xz)e^{xz+y}, xze^{xz+y}, x(1+xz)e^{xz+y})$, considere una partícula confinada a moverse a través de la curva Γ. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$, al llevar dicha partícula desde la altura $z=1$ hasta $z=z_0$ con $0<z_0\leq 1$. ¿Cuál sería el trabajo para llevarla hasta el origen?

(iii) Suponga ahora, que la curva es un alambre cuya densidad lineal de masa está dada por $\rho(x,y,z)=\sqrt{1+2z}$. Calcule la masa total y las coordenadas del centro de masa del alambre.

Indicación: Puede serle de utilidad saber que: $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(x)dx = \frac{a}{1+a^2}$

Respuesta: $\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{sen}(x)dx = \frac{1}{1+a^2}$

(i) $x^2+y^2-z=0 \Rightarrow \rho^2-z=0 \Rightarrow \rho^2=z$

$\frac{d^2\rho}{d\theta^2}=\rho \qquad \rho(0)=1 \qquad \frac{d\rho}{d\theta}(0)=-1$

La única función que al derivarla queda igual es la exponencial, por lo que la solución de la ecuación diferencial debe ser algo así:

$$\rho = Ae^{\theta}+Be^{-\theta} \Rightarrow \frac{d\rho}{d\theta}=Ae^{\theta}-Be^{-\theta} \Rightarrow \frac{d^2\rho}{d\theta^2}=Ae^{\theta}+Be^{-\theta}=\rho$$

$$\frac{d\rho}{d\theta}(0)=A-B=-1 \quad \wedge \quad \rho(0)=A+B=1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} A-B=-1 \\ A+B=1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2A=0 \Rightarrow A=0 \\ -2B=-2 \Rightarrow B=1 \end{matrix}$$

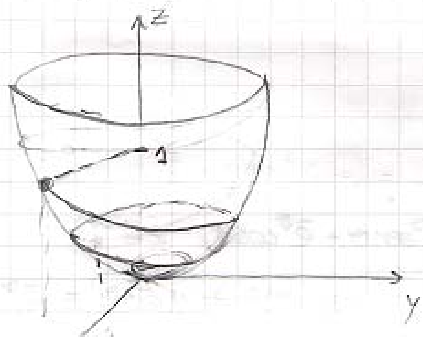
$$\Rightarrow \rho = e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow z = e^{-2\theta}$$

$$x=e^{-\theta}\cos\theta \quad \wedge \quad y=e^{-\theta}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \vec{r}(\theta): (e^{-\theta}\cos\theta, e^{-\theta}\,\text{sen}\,\theta, e^{-2\theta})$$

La superficie es $x^2+y^2=z$ (Paraboloide)



Si $x=0 \Rightarrow y^2=z$ (Parábola)
Si $y=0 \Rightarrow x^2=z$ (Parábola)

La curva Γ:
Si $\theta=0$ $x=1, y=0, z=1$
Si $\theta=\pi/2$ $x=0, y=e^{-\pi/2}, z=e^{-\pi}$
Si $\theta=+\infty$ $x=0, y=0, z=0$

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = \left(z(1+xz)e^{xz+y},\ xze^{xz+y},\ x(1+xz)e^{xz+y}\right)$

Busquemos g : $\frac{\partial g}{\partial x} = z(1+xz)e^{xz+y}$

$$\Rightarrow g = xze^{xz+y} + C(y,z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[xze^{xz+y} + C(y,z)\right] = xze^{xz+y} + \frac{\partial C}{\partial y} = xze^{xz+y}$$

$$\Rightarrow C = C(z)$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[xze^{xz+y} + C(z)\right] = xe^{xz+y} + x^2ze^{xz+y} + \frac{\partial C}{\partial z} = x(1+xz)e^{xz+y}$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$g(x,y,z) = xze^{xz+y}$$

Γ:
$$\vec{r}(\theta) = \left(e^{-\theta}\cos\theta,\ e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta,\ e^{-2\theta}\right)$$

Necesitamos llevar la partícula desde $z=1$ a $z=z_0$

$z(\theta) = e^{-2\theta}$ $\quad$ Si $z=1 \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow \vec{r} = (1,0,1)$

$$z_0 = e^{-2\theta_0} \Rightarrow \ln(z_0) = -2\theta_0 \Rightarrow \theta_0 = -\frac{\ln(z_0)}{2} = -\ln(z_0^{1/2})$$

$$\Rightarrow \vec{r}(\theta_0) = \left(z_0^{1/2}\cos\left(-\ln(z_0^{1/2})\right),\ z_0^{1/2}\operatorname{sen}\left(-\ln(z_0^{1/2})\right),\ z_0\right)$$

$$\int_1^{z_0} \vec{F}\cdot d\vec{r} = g(z=z_0) - g(z=1)$$

$$g(z=z_0) = z_0^{1/2}\cos\left(-\ln z_0^{1/2}\right)\cdot z_0\ e^{z_0^{3/2}\cos\left(-\ln z_0^{1/2}\right) + z_0^{1/2}\operatorname{sen}\left(-\ln z_0^{1/2}\right)}$$

$$g(z=1) = 1\cdot 1\ e^{1\cdot 1+0} = e$$

Para llevarla al origen $\vec{r} = (0,0,0)$

$$g(0,0,0) = 0$$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 - e = -e$$

(iii) $\rho(x,y,z) = \sqrt{1+2z}$.

$$M = \int \rho\, ds = \int \rho \cdot \left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\| d\theta$$

$$\rho(\vec{r}(\theta)) = \sqrt{1+2e^{-2\theta}}$$

$$\vec{r}\,'(\theta) = \left(-e^{-\theta}\cos\theta - e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta,\ -e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta + e^{-\theta}\cos\theta,\ -2e^{-2\theta}\right)$$

$$\|\vec{r}\,'(\theta)\| = e^{-\theta}\sqrt{(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)^2 + 4e^{-2\theta}} = e^{-\theta}\sqrt{2+4e^{-2\theta}}$$

$$M = \int_0^{\infty} \sqrt{1+2e^{-2\theta}}\cdot e^{-\theta}\cdot\sqrt{2}\sqrt{1+2e^{-2\theta}}\, d\theta = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-\theta}(1+2e^{-2\theta}) = \sqrt{2}\int_0^{\infty}(e^{-\theta}+2e^{-3\theta})\,d\theta$$

$$M = \sqrt{2}\left[-e^{-\theta} - \frac{2}{3}e^{-3\theta}\right]\Bigg|_0^{\infty} = \sqrt{2}\left(1+\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot 5}{3}$$

$$CM_x = \frac{1}{M}\int x(\theta)\rho(\sigma(\theta))\cdot\left\|\frac{d\sigma}{d\theta}\right\| d\theta$$

$$x(\theta) = e^{-\theta}\cos\theta \ ; \ \rho(\sigma(\theta)) = \sqrt{1+2e^{-2\theta}} \ ; \ \left\|\frac{d\sigma}{d\theta}\right\| = e^{-\theta}\sqrt{2}\sqrt{1+2e^{-2\theta}}$$

$$CM_x \underset{\substack{\uparrow \\ \text{indicación}}}{=} \frac{3}{5}\left[\frac{2}{1+4} + 2\cdot\frac{4}{1+16}\right] = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{17}\right) = \frac{222}{425}$$

$$CM_y = \frac{1}{M}\int_0^{\infty} y(\theta)\rho(\sigma(\theta))\left\|\frac{d\sigma}{d\theta}\right\| d\theta$$

$$CM_y = \frac{3}{5}\int_0^{\infty} e^{-2\theta}\operatorname{sen}\theta\,(1+2e^{-2\theta}) = \frac{3}{5}\left[\frac{1}{1+4} + 2\cdot\frac{1}{1+16}\right] = \frac{81}{425}$$

$$CM_z = \frac{3}{5\cancel{\sqrt{2}}}\int_0^{\infty} e^{-2\theta}\sqrt{1+2e^{-2\theta}}\,e^{-\theta}\cancel{\sqrt{2}}\sqrt{1+2e^{-2\theta}}$$

$$CM_z = \frac{3}{5}\int_0^{\infty} e^{-3\theta}(1+2e^{-2\theta}) = \frac{3}{5}\int_0^{\infty} e^{-3\theta}+2e^{-5\theta}\,d\theta = \frac{3}{5}\left[1+2\right] = \frac{9}{5}$$

P6.

MA 26 B-02 (clase del 12/08/2005)

Ej. 1 (Conservativo + no-Conservativo) JUAN MAYORGA Z.

Considere el campo de fuerzas definido por

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2\cos x + z^3 \\ 2y\,\mathrm{sen}\,x \quad -2xy-4 \\ 3xz^2+2 \end{pmatrix}.$$

¿Es conservativo?

Sol.- • la estructura algebraica de F_1, F_2 y F_3 nos hace pensar que $\vec{F}$ podría ser conservativo.

- Supongamos entonces que F es conservativo así que existe un campo escalar $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tal que

$$F = -\nabla f \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ -f_z \end{pmatrix} \qquad (0)$$

De la relación $F_1 = -f_x$, al integrar en x tenemos

$$-f = y^2\,\mathrm{sen}\,x + xz^3 + c_1(y,z) \qquad (1)$$

De la relación $F_2 = -f_y$, al integrar en y tenemos

$$-f = y^2\,\mathrm{sen}\,x - xy^2 - 4y + c_2(x,z) \qquad (2)$$

De la relación $F_3 = -f_z$, al integrar en z tenemos

$$-f = xz^3 + 2z + c_3(x,y). \qquad (3)$$

Obsérvese que c_1, c_2, c_3 son las "constantes" de integración.

Ahora, por observación en (1), (2) y (3),

$-f = \quad y^2\,\mathrm{Sen}\,x +$ aparece en (1) y (2)

$+ xz^3 -$ " " (1) y (3)

$- xy^2 -$ " " (2)

$- 4y +$ " " (2)

$+ 2z$ " " (3)

i.e. proponemos
$$-f = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - xy^2 - 4y + 2z. \qquad (4)$$

Ahora, verifiquemos si es que se cumple la relación (0).
Entonces derivando en (4):

(5) $\qquad -f_x = y^2 \cos x + z^3 - y^2 \qquad$ (No coincide con F_1)

(6) $\qquad -f_y = 2y \operatorname{sen} x - 2xy - 4 \qquad$ (Coincide con F_2)

El término $-y^2$ que aparece en (5) es un "parásito" cuya presencia nos permite concluir que $\vec{F}$ no es conservativo.

- Sin embargo, de las "coincidencias" que aparecen en (5), (6) y (7) intuimos que probablemente se puede escribir
$$\vec{F} = \vec{L} + \vec{J}$$
donde $\vec{L}$ es un campo conservativo y J no lo es.

Recuperemos $\vec{L}$... El término parásito $-y^2$, en (5) viene del término $-2xy$ en F_2 y de $-xy^2$ en (4) "extraemos" el parásito de F para definir $\vec{L}$.
$$\vec{L} = \begin{pmatrix} y^2 \cos x + z^3 \\ 2y \operatorname{sen} x - 4 \\ 3xz^2 + z \end{pmatrix},$$
y, aprovechando los cálculos hechos en (5), (6) y (7) podemos ver que $\quad l(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z$
es tal que la relación
$$\vec{L} = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = -\nabla l$$
se cumple,
es decir, $\vec{L}$ es conservativo.

Luego definimos $\vec{J}$ a través de $J = \vec{F} - \vec{L}$, es decir,

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2xy \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{que es no-conservativo.}$$

Ej 2 Sea Γ la curva parametrizada por

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-\theta}\cos\theta \\ e^{-\theta}\operatorname{sen}\theta \\ e^{-2\theta} \end{pmatrix}, \quad \theta \geq 0$$

Calcule el trabajo que realiza $\vec{F}$ (del ejercicio 1) a lo largo de Γ (desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \infty$)

Sol:- Puesto que $\vec{F} = \vec{L} + \vec{J}$, se tiene que

$$W_F = \int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (\vec{L} + \vec{J}) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_\Gamma \vec{L} \cdot d\vec{r} + \int_\Gamma \vec{J} \cdot d\vec{r},$$

es decir

$$\boxed{W_F = W_L + W_J}, \qquad (8)$$

"El trabajo de la fuerza total es la suma del trabajo que realizan sus componentes".

Ahora bien, sabemos que $\vec{L}$ es conservativo, así que

$$W_L = \ell(\vec{r}(0)) - \lim_{\theta \to +\infty} \ell(\vec{r}(\theta))$$

$$= \ell\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \ell\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 - 0 = 3 \qquad (9)$$

• Puesto que $\vec{J}$ es no-conservativo,

$$W_J = \int_{\Gamma} \vec{J} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\infty} \vec{J}(r(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta)\, d\theta$$

Tenemos que

$$J(r(\theta)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-2\theta} \operatorname{Sen} 2\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{d\vec{r}}{d\theta}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-\theta}(-\operatorname{Cos}\theta - \operatorname{Sen}\theta) \\ e^{-\theta}(-\operatorname{Sen}\theta + \operatorname{Cos}\theta) \\ -2e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

así que

$$W_J = \int_0^{\infty} e^{-3\theta} \operatorname{Sen} 2\theta \left(\operatorname{Sen}\theta - \operatorname{Cos}\theta\right) d\theta = \ldots \qquad (10)$$

Y entonces usamos (9), (10) en (8).