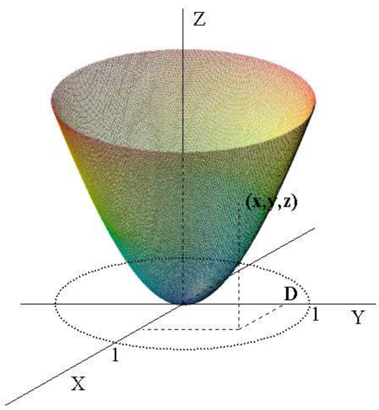
Problemas resueltos

1. Calcule el área de la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

Solución:

La intersección del paraboloide con el plano $z = 0$ es el punto $(0, 0)$ y con el plano $z = 1$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La región limitada por la proyección de dicha circunferencia sobre el plano XY es

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$



Podemos considerar la siguiente parametrización:

$$r(x, y) = (x, y, x^2 + y^2), \quad (x, y) \in D.$$

De esta manera $S = r(D)$, siendo S la superficie descrita en el enunciado. Su producto vectorial fundamental es:

$$N(x, y) = (-2x, -2y, 1), \quad \text{y} \quad \|N(x, y)\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

El área solicitada será:

$$a(S) = \iint_D \|N(x, y)\| dxdy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy.$$

Esta integral la haremos mediante un cambio de variable a coordenadas polares.

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} 0 < \rho \leq 1 \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{array} \quad \text{y} \quad J_T(\rho, \varphi) = \rho > 0.$$

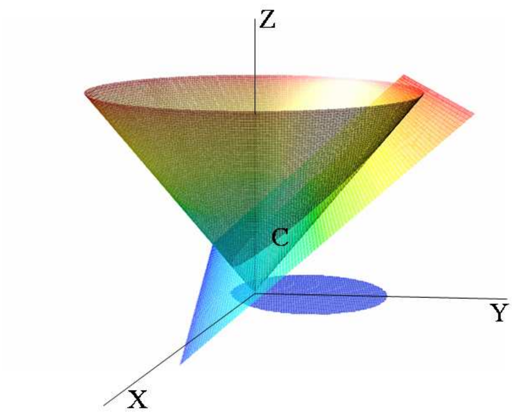
$$a(S) = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\, dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \sqrt{4\rho^2 + 1}\, \rho\, d\varphi\right] d\rho =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{8}\,\frac{2}{3}(4\rho^2 + 1)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5} - 1).$$

2. Parametrize la superficie plana cuyo borde es la curva

$$C : \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2/2 \\ z = y + 1 \end{array}\right.$$

Solución:



La curva C es la intersección del cono $x^2 + y^2 = z^2/2$ con el plano $z = y + 1$:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}(y+1)^2 = \frac{1}{2}(y^2 + 2y + 1) \quad \rightarrow \quad x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y - \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

Es una elipse en el plano $z = y + 1$. Su proyección sobre el plano XY es la curva γ de ecuación $x^2 + \dfrac{(y-1)^2}{2} = 1$ (una elipse, también). Sea S la superficie del plano $z = y + 1$ limitada por C; se puede parametrizar como

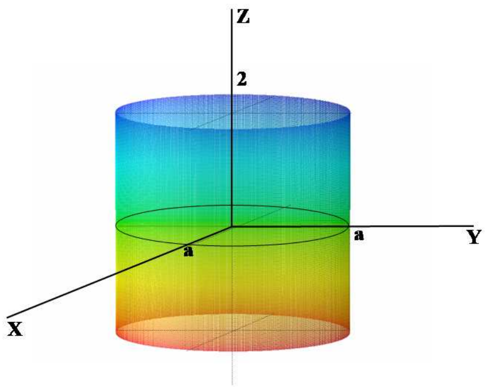
$$r(x,y) = (x, y, y+1), \quad (x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1\right\}.$$

3. Calcule la integral

$$\int_S x^2 z \, dS \, ,$$

siendo S la superficie externa de $x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre $z = 2$ y $z = -2$.

Solución:



La superficie es un cilindro circular recto. Puesto que $x^2 + y^2 = a^2$ y z está entre -2 y 2 consideraremos la siguiente parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos u \\ y = a\,\mathrm{sen} u \\ z = v \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad r(u,v) = (a\cos u, a\,\mathrm{sen} u, v), \ (u,v) \in D = [0, 2\pi]\times[-2,2]$$

Calculemos el producto vectorial fundamental:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) = (-a\,\mathrm{sen} u, a\cos u, 0), \quad \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = (0,0,1)$$

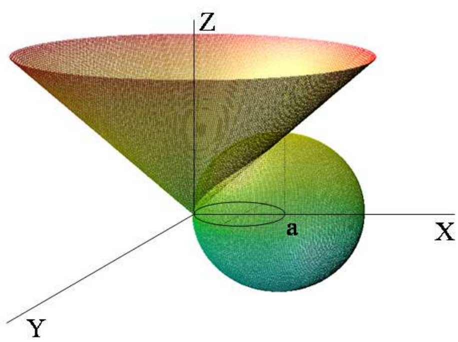
$$N(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -a\,\mathrm{sen}u & a\cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos u, a\,\mathrm{sen}u, 0);$$

$$\|N\| = a$$

$$\int_S x^2 z dS = \iint_D a^3 v \cos^2 u\, du dv = a^3 \int_0^{2\pi} \left[\int_{-2}^{2} v \cos^2 u\, dv \right] du =$$
$$= a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 u \left[\frac{v^2}{2} \right]_{-2}^{2} du = 0.$$

4. Calcule el área de la porción de superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ situada por encima del plano $z = 0$ y limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$.

Solución:



Hemos de parametrizar la superficie de la cual hay que hallar el área, esto es, la hoja superior (pues $z \geq 0$) del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Como S es la gráfica de la función $z = \sqrt{x^2 + y^2} = f(x,y)$ sobre la región D (que queda definida por la intersección del cono y la esfera)

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2ax \end{array} \right\} \quad \rightarrow \quad 2(x^2 + y^2) = 2ax \quad \rightarrow \quad (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - \frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4} \right\}$$

entonces $S = r(D)$ siendo r la parametrización:

$$r(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}), \quad \forall (x, y) \in D.$$

El producto vectorial fundamental es:

$$N(x, y) = (-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1) = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \right),$$

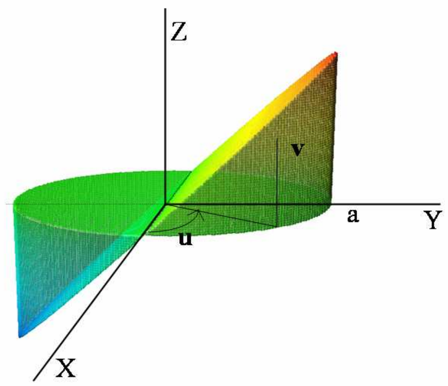
$$\|N(x, y)\| = \sqrt{2}.$$

y el área pedida vale:

$$a(S) = \iint_D \|N(x, y)\| dxdy = \iint_D \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\, \mu(D) = \sqrt{2}\, \pi \frac{a^2}{4}.$$

5. Dado el recinto limitado por los planos $z = y$, $z = 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. Calcule el área de la porción de superficie cilíndrica comprendida entre los dos planos.

Solución:



En el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ podemos tomar la parametrización:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \cos u \\ y = a \,\mathrm{sen} u \\ z = v \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad r(u, v) = (a \cos u, a \,\mathrm{sen} u, v), \quad (u, v) \in D$$

siendo

$$D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le u \le \pi, \ 0 \le v \le a\text{sen}u\}$$

De esta manera $S = r(D)$ es la mitad de la superficie que se describe en el enunciado porque sólo consideramos la porción del cilindro con $z \ge 0$. El producto vectorial fundamental es (véase el problema 1)

$$N(u,v) = (a\cos u, a\,\text{sen}u, 0), \quad \|N\| = a$$

y el área de S

$$\begin{aligned} a(S) &= \iint_D a du dv = \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{a\,senu} a dv \right) du = \int_0^\pi a^2 \text{sen}u du = -a^2 \cos u \Big]_0^\pi = 2a^2. \end{aligned}$$

Por tanto, el área que nos piden, que es el doble que la de S, vale: $\quad 4a^2.$

6. Un flujo de fluido tiene como vector densidad de flujo

$$F(x,y,z) = x\vec{\imath} - (2x+y)\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Designemos con S el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ z \ge 0$, siendo n la normal unitaria orientada hacia el exterior de la esfera. Calcule la masa de fluido que atraviesa S en la unidad de tiempo en el sentido de la normal n.

Solución:

La masa de fluido que atraviesa la superficie en el sentido de la normal n es la integral $\displaystyle\int_S F \cdot n\, ds$. Para calcularla parametrizamos la semiesfera:

$$r(u,v) = (\text{sen}\, u \cos v, \text{sen}\, u\, \text{sen}\, v, \cos u), \quad (u,v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] = D$$

El producto vectorial fundamental es

$$N(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos u \cos v & \cos u\, \text{sen}\, v & -\text{sen}\, u \\ -\text{sen}\, u\, \text{sen}\, v & \text{sen}\, u \cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{sen}^2 u \cos v, \text{sen}^2 u\, \text{sen}\, v, \text{sen}\, u \cos u).$$

Para ver la orientación de N podemos, por ejemplo, calcular dicho vector en algún punto concreto de la superficie y en todos los demás puntos la orientación será la misma. Veamos qué pasa en el punto $(0,1,0)$, es decir, si tomamos $u = v = \dfrac{\pi}{2}$: aquí es $N(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}) = (0,1,0)$ y es hacia el exterior de la esfera. La parametrización que hemos considerado en este caso es la adecuada. Así:

$$
\begin{aligned}
F(r(u,v)) \cdot N(u,v) = & \\
&= (\operatorname{sen} u\ \cos v, (-2\cos v - \operatorname{sen} v)\operatorname{sen} u, \cos u) \cdot \\
&\cdot (\operatorname{sen}^2 u \cos v,\ \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen} v,\ \operatorname{sen} u \cos u) = \\
&= \operatorname{sen}^3 u\ \cos^2 v - 2\operatorname{sen}^3 u\ \cos v \operatorname{sen} v - \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^2 v\ + \cos^2 u \operatorname{sen} u = \\
&= \operatorname{sen}^3 u\,(\cos 2v - \ \operatorname{sen} 2v) + \cos^2 u \operatorname{sen} u.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_S F \cdot n\, dS = \int_S F dS = \iint_D F(r(u,v)) \cdot N(u,v) = & \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^3 u\,(\cos 2v - \ \operatorname{sen} 2v) + \cos^2 u \operatorname{sen} u) dv \right] du = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen}^3 u\, \frac{1}{2} \Big[\operatorname{sen} 2v\ + \cos 2v\ \Big]_0^{2\pi} + 2\pi \cos^2 u \operatorname{sen} u \right) du = \\
&= \left[-2\pi \frac{\cos^3 u}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

7. Calcule, aplicando el teorema de Stokes, la integral

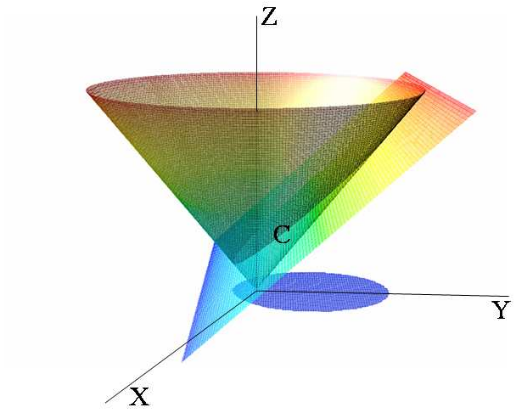
$$
\int_C (y-1)dx + z^2 dy + y dz\ , \quad \text{donde} \quad C : \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2/2 \\ z = y + 1 \end{array} \right.
$$

Solución:

Sea $F(x,y,z) = (y-1, z^2, y)$, que es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Por el teorema de Stokes

$$
\int_C F = \int_S rot F dS
$$

siendo $S = r(D)$ una superficie simple y regular cuyo borde C es la imagen $r(\gamma^*)$ de una curva γ de Jordan $\mathcal{C}^1$ a trozos orientada positivamente.



Sea S la superficie del plano $z = y + 1$ limitada por C; se puede parametrizar como (vease el problema 2)

$$r(x, y) = (x, y, y + 1), \quad (x, y) \in D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{2} \leq 1 \right\}.$$

$$rotF(x, y, z) = (1 - 2z, 0, -1); \quad N(x, y) = (0, -1, 1)$$

Así la integral de línea que se pide vale:

$$\int_C F = \int_S rotF dS = \iint_D (1 - 2(y + 1), 0, -1).(0, -1, 1) dxdy =$$
$$= \iint_D -dxdy = -\mu(D) = -\sqrt{2}\,\pi.$$

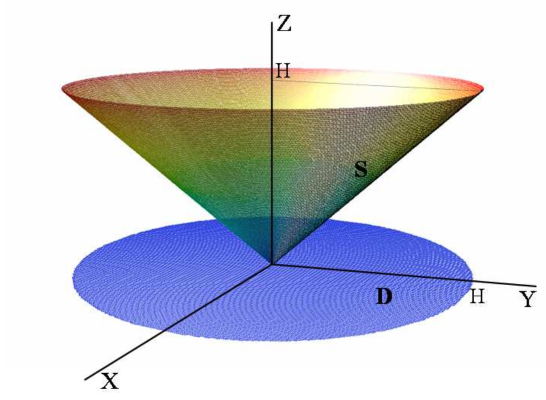
8. Halle el flujo del campo $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z \leq H$.

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Gauss.

Solución:

El flujo del campo se calcula mediante la integral de superficie $\int_S F dS$. Hemos de parametrizar el cono $x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z \leq H$.



$$\left.\begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = \sqrt{x^2+y^2} = u \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u), \quad (u,v) \in D$$

siendo

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le u \le H, \ 0 \le v \le 2\pi\right\}$$

que es el círculo $x^2+y^2 \le H^2$ en el plano XY (en coordenadas polares).

$$N(u,v) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos v, -u\sin v, u)$$

$$\begin{aligned} &\int_S F dS = \\ &\qquad = \iint_D (u^3\cos^3 v, u^3\sin^3 v, u^3).(-u\cos v, -u\sin v, u) du dv = \\ &\qquad = \iint_D u^4(-\cos^4 v - \sin^4 v + 1) du dv = \\ &\qquad = \iint_D u^4(2\sin^2 v\cos^2 v) du dv = \iint_D u^4 \frac{\sin^2 2v}{2} du dv = \\ &\qquad = \frac{1}{4}\int_0^H \left(\int_0^{2\pi} u^4(1-\cos 4v) dv\right) du = \frac{1}{4}\left[\frac{u^5}{5}\right]_0^H . \left[v - \frac{\sin 4v}{4}\right]_0^{2\pi} = \\ &\qquad = \frac{1}{10}\pi H^5. \end{aligned}$$

b) Sea V el sólido limitado por el cono y el plano $z = H$. La superficie cerrada que limita V es la unión, $S \cup S_1$, donde S_1 es la superficie paramétrica que describe el círculo $x^2 + y^2 = H^2$ en el plano $z = H$. Aplicando el teorema de Gauss:

$$\iiint_V divF dxdydz = \int_S F \cdot n\, dS + \int_{S_1} F \cdot n\, dS_1$$

y podemos calcular la integral de superficie que nos piden como

$$\int_S F \cdot n\, dS = \iiint_V divF dxdydz - \int_{S_1} F \cdot n\, dS_1$$

siendo n la normal exterior.

$$divF = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \int\int\int_V divF dxdydz = 3\int\int\int_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

Para calcular esta integral haremos un cambio a coordenadas cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi \\ z = z \end{array}\right\} \quad \text{con} \quad \left.\begin{array}{c} 0 < \rho \leq H \\ 0 < \varphi < 2\pi \\ \rho \leq z \leq H \end{array}\right\}$$

(teniendo en cuenta que sobre el cono es $z^2 = x^2 + y^2 \;\rightarrow\; z = \rho$). De donde:

$$\begin{aligned}
&\iiint_V divF dxdydz = \\
&\qquad = 3\int_0^H \int_0^{2\pi} \int_\rho^H (\rho^2 + z^2)\rho dz d\varphi d\rho = 6\pi \int_0^H \left[\rho^3 z + \rho\frac{z^3}{3}\right]_\rho^H d\rho = \\
&\qquad = 6\pi \int_0^H \left(H\rho^3 + \frac{H^3}{3}\rho - \rho^4 - \frac{\rho^4}{3}\right) d\rho = \\
&\qquad = 6\pi \left[H\frac{\rho^4}{4} + H^3\frac{\rho^2}{6} - \frac{4}{15}\rho^5\right]_0^H = \frac{9}{10}\pi H^5.
\end{aligned}$$

Nos falta calcular la integral de F sobre S_1. Parametrizamos la superficie:

$$r_1(x,y) = (x,y,H), \quad (x,y) \in Q = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x^2 + y^2 \leq H^2\right\}.$$

El producto vectorial fundamental es $N(x,y) = (0,0,1)$ (normal exterior). Entonces:

$$\int_{S_1} F \cdot n\, dS =$$
$$= \iint_Q (x^3, y^3, H^3).(0,0,1) dxdy = H^3 \iint_Q dxdy = H^3 \mu(Q) = \pi H^5.$$

De donde:

$$\int_S F \cdot n\, dS = \iiint_V divF dxdydz - \int_{S_1} F \cdot n\, dS_1 = \frac{9}{10}\pi H^5 - \pi H^5 = -\frac{1}{10}\pi H^5.$$

Como para el cálculo de la integral $\displaystyle\int_S FdS$ en el apartado a), hemos utilizado una parametrización cuyo vector fundamental, $N(u,v) = (-u\cos v, -u \sin v, u)$, es normal hacia el interior de V (pues tiene tercera coordenada positiva) entonces

$$\int_S FdS = -\int_S F \cdot n\, dS = \frac{1}{10}\pi H^5$$

que concuerda con el resultado obtenido en el apartado a).

9. Calcule, utilizando el teorema de Stokes, la integral curvilínea

$$\int_\gamma (2x + y - z)\, dx \;+\; (2x + z)\, dy \;+\; (2x - y - z)\, dz$$

siendo γ una parametrización de la curva intersección de las superficies

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4\,, \qquad 2x - z = 0.$$

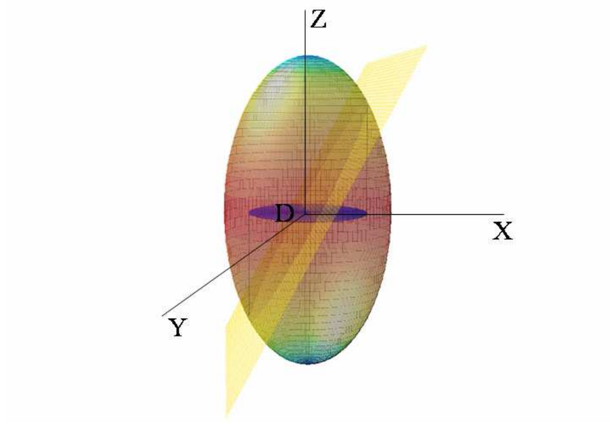
Solución:

El teorema de Stokes relaciona la integral curvilínea de un campo vectorial a lo largo de una curva cerrada con el flujo del rotacional del campo a través de una superficie cuyo borde sea la curva en cuestión. En este caso la superficie más sencilla es la superficie plana que parametrizamos mediante:

$$r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad r(x,y) = (x, y, 2x)\,,$$

siendo el vector normal:

$$N(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = (-2, 0, 1).$$



Para hallar el conjunto en el que varían los parámetros proyectamos la curva sobre el plano XY:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} z = 2x \\ 2x^2 + y^2 = 1 \text{ (Proyección)} \end{array}\right.$$

Por tanto, el conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ tal que $S = r(D)$ es el interior de la elipse $2x^2 + y^2 = 1$,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 2x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calculamos el rotacional de $F = (2x + y - z \, , \, 2x + z \, , \, 2x - y - z)$:

$$\text{rot}F(x, y, z) = (-2, -3, 1).$$

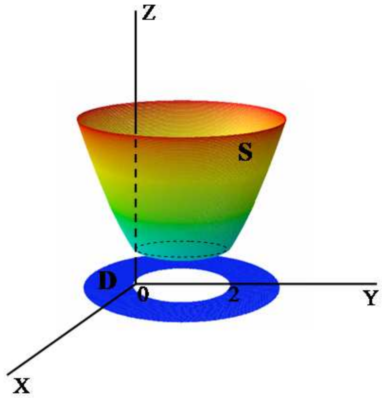
Entonces, si γ es una parametrización de la curva intersección del elipsoide y el plano tal que su proyección en el plano XY se recorre en sentido positivo, el teorema de Stokes dice que

$$\int_\gamma F = \int_S \text{rot}F \, dS = \iint_D (-2, -3, 1) \cdot (-2, 0, 1) \, dxdy =$$
$$= 5 \iint_D dxdy = 5 \, \mu(D) = \frac{5\pi}{\sqrt{2}}.$$

10. Halle el área de la porción de la superficie $z = x^2 + (y-1)^2$ comprendida entre los planos $z = 1$ y $z = 4$.

Solución:

La superficie de ecuación $z = x^2 + (y-1)^2$ es un paraboloide de revolución cuyo eje es una recta paralela al eje Z y el vértice es el punto de coordenadas $(0,1,0)$.



La superficie S es la porción de paraboloide limitada por los planos $z = 1$ y $z = 4$, esta superficie puede parametrizarse utilizando x e y como parámetros, de la forma:

$$r : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad r(x,y) = (x, y, x^2 + (y-1)^2)\,,$$

$$S = r(D)\,, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad 1 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 4\}.$$

El vector normal es

$$N(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial y} = (-2x, -2(y-1), 1), \;\; \|N(x,y)\| = \sqrt{4x^2 + 4(y-1)^2 + 1}.$$

El área de S se obtiene

$$a(S) = \iint_D \|N(x,y)\|\, dxdy = \iint_D \sqrt{4x^2 + 4(y-1)^2 + 1}\; dxdy;$$

Como el recinto de integración D es un anillo circular desplazado, resolveremos la integral realizando un cambio a coordenadas polares aunque desplazando el centro:

$$x = \rho \cos\varphi\,, \quad y = 1 + \rho \sin\varphi\,, \quad \rho \in]1,2[\;,\; \varphi \in]0, 2\pi].$$

Aplicando el teorema de cambio de variables

$$\iint_D \sqrt{4x^2 + 4(y-1)^2 + 1}\, dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \sqrt{4\rho^2 + 1}\; \rho\; d\rho d\varphi = \frac{\pi(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})}{6}.$$

11. Calcule la integral curvilínea

$$\int_\alpha (y - z)\, dx \,+\, (z - x)\, dy \,+\, (x - y)\, dz$$

siendo α una parametrización de la curva dada por las ecuaciones

$$\alpha \;:\qquad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 4y^2 = 1\ , \\ z = x^2 + y^2. \end{array} \right.$$

a) Directamente.

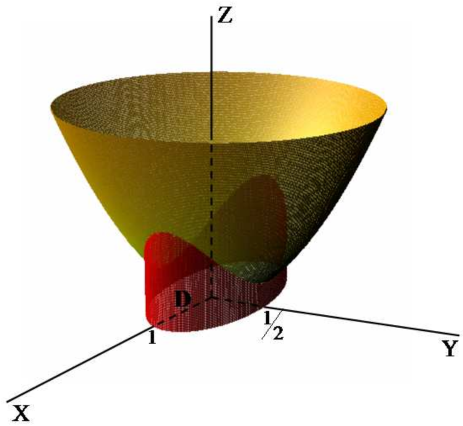
b) Utilizando el teorema de Stokes.

Solución:

a) Directamente.

Comenzamos parametrizando la curva:

$$\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad \alpha(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t, 1 - \frac{3}{4}\sin^2 t).$$



Aplicando la definición de integral de línea de un campo vectorial, se tiene que

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)dt =$$
$$= (\frac{1}{2}\sin t - 1 + \frac{3}{4}\sin^2 t, 1 - \cos t - \frac{3}{4}\sin^2 t, \cos t - \frac{1}{2}\sin t)\cdot$$
$$\cdot\, (-\sin t, \frac{1}{2}\cos t, -\frac{3}{2}\cos t\ \sin t).$$

de donde

$$\int_\gamma (y-z)\,dx \;+\; (z-x)\,dy \;+\; (x-y)\,dz = \int_0^{2\pi} F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)dt = -\pi.$$

b) Utilizando el teorema de Stokes.

En primer lugar calculamos el rotacional de F:

$$\mathrm{rot}F(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = (-2,-2,-2).$$

A continuación, elegimos como superficie para calcular el flujo del rotacional la porción de paraboloide situada dentro del cilindro. Parametrizamos dicha superficie S mediante la función r:

$$r : D \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \;\;:\;\;\; r(x,y) = (x,y,x^2+y^2)\;,$$

de esta forma, $S = r(D)$ siendo $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; x^2+4y^2 \le 1\}$. El vector normal es

$$N(x,y) = \frac{\partial r}{\partial x} \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = (-2x,-2y,1).$$

La curva α se obtiene como $\alpha = r\circ\gamma$ siendo γ la parametrización de la frontera de T orientada positivamente

$$\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\sin t).$$

Por tanto, aplicando el teorema de Stokes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_\alpha F &= \int_S \mathrm{rot}F\,dS = \iint_D \mathrm{rot}F(r(x,y))\cdot N(x,y)\,dxdy = \\ &= \iint_D (4x+4y-2)\;dxdy = \iint_D (4x+4y)\;dxdy - 2\mu(D) = \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}} (4x+4y)\,dy\right)dx - \pi = \int_{-1}^{1}(4x\sqrt{1-x^2})\,dx - \pi = -\pi. \end{aligned}$$

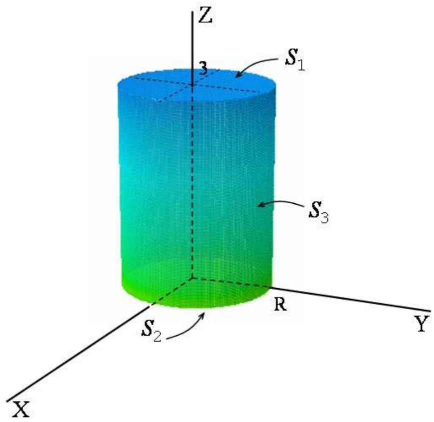
12. a) Calcule el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (xz, -y^2, xz)$ a través de la superficie cerrada que limita el cilindro

$$x^2 + y^2 \leq R^2 \qquad \text{con} \quad 0 \leq z \leq 3.$$

b) Resuelva el apartado anterior utilizando el teorema de Gauss.

Solución:

a) La superficie cerrada S que limita el cilindro es la unión de tres superficies: la tapa superior S_1, la inferior S_2 y la superficie cilíndrica S_3.



Por tanto, hemos de calcular la integral de F en cada una de ellas.

- Parametrizamos S_1:

$$r_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \quad r_1(x,y) = (x,y,3) \ ,$$

$$S_1 = r_1(D) \ , \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$

El vector normal es

$$N_1(x,y) = \frac{\partial r_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial r_1}{\partial y} = (0,0,1) \ ,$$

cuyo sentido es hacia el exterior de la superficie S. Calculamos,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r_1(x,y)) \cdot N_1(x,y) \, dxdy = \\ &= \iint_D (3x, -y^2, 3x) \cdot (0,0,1) \ dxdy = \\ &= \iint_D 3x dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R 3\rho^2 \cos\varphi \, d\rho \right) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

- Parametrizamos S_2:

$$r_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \quad r_2(x,y) = (x,y,0) \ , \quad S_2 = r_2(D).$$

El vector normal

$$N_2(x,y) = \frac{\partial r_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial r_2}{\partial y} = (0,0,1) \ ,$$

está dirigido hacia el interior de la superficie S. Calculamos,

$$\begin{aligned}\int_{S_2} F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r_2(x,y)) \cdot (-N_2(x,y)) \, dxdy = \\ &= \iint_D (0,-y^2,0) \cdot (0,0,-1) \ dxdy = 0.\end{aligned}$$

- Parametrizamos S_3:

$$r_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \quad r_3(u,v) = (R\cos u, R\sin u, v) \ ,$$

$$S_3 = r_3(D) \ , \qquad D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le u \le 2\pi \ , \ 0 \le v \le 3\}.$$

El vector normal es

$$N_3(u,v) = \frac{\partial r_3}{\partial u} \wedge \frac{\partial r_3}{\partial v} = (R\cos u, R\sin u, 0) \ ,$$

y su sentido es hacia el exterior de S. El flujo de F a través de S_3 se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{S_3} F \cdot ndS &= \iint_D F(r_3(u,v)) \cdot N_3(u,v) \, dudv = \\ &= \iint_D (Rv\cos u, -R^2 \sin^2 u, Rv\cos u) \cdot (R\cos u, R\sin u, 0) dudv = \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (R^2 v \cos^2 u - R^3 \sin^3 u) \, dudv = \frac{9}{2}\pi R^2.\end{aligned}$$

b) Calculamos el flujo del campo utilizando el teorema de Gauss.

$$\int_S F \cdot n \ dS \ = \ \iiint_V \mathrm{div} F \, dxdydz,$$

siendo $V \subset \mathbb{R}^3$ el volumen limitado por la superficie S. En primer lugar calculamos la divergencia de F

$$\mathrm{div} F(x,y,z) = z - 2y + x.$$

La forma más conveniente de realizar la integral en el conjunto V es hacer un cambio a coordenadas cilíndricas, ya que por ser V un cilindro el recinto de integración en estas variables es un rectángulo, es decir,

$$\rho \in]0, R[\,, \quad \varphi \in]0, 2\pi[\,, \quad z \in]0, 3[.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_S F \cdot n \, dS &= \iiint_V \operatorname{div} F \, dxdydz = \iiint_V (z - 2y + x) \, dxdydz = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^3 (z - 2\rho \sin\varphi + \rho\cos\varphi)\rho \, dz d\varphi d\rho = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (\frac{9}{2}\rho - 6\rho^2 \sin\varphi + 3\rho^2 \cos\varphi) d\varphi d\rho = \int_0^R 9\pi\rho d\rho = \frac{9}{2}\pi R^2\end{aligned}$$

13. Calcule el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, 2z)$, a través de la superficie cerrada S que limita el sólido

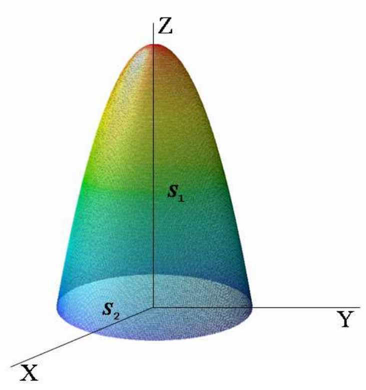
$$V := \{(x, y, z) \;\; / \;\; 0 \leq z \leq 4 - 2x^2 - 2y^2\}$$

a) directamente.

b) utilizando el teorema de Gauss.

Solución:

a) La superficie cerrada S que limita el sólido V está compuesta por dos superficies: una porción del paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$, S_1, y la tapa inferior S_2.



Por tanto, hay que calcular el flujo de F a través de cada una de ellas hacia el exterior de la superficie cerrada.

- Parametrizamos S_1 de ecuación $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ (paraboloide):

$$r_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \quad r_1(x, y) = (x, y, 4 - 2x^2 - 2y^2) \ ,$$

Donde las variables x e y varían en la proyección del sólido en el plano XY, que calculamos a partir de la interseccción del paraboloide $z = 4 - 2x^2 - 2y^2$ con el plano $z = 0$.

$$S_1 = r_1(D) \ , \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

El vector normal

$$N_1(x, y) = \frac{\partial r_1}{\partial x} \wedge \frac{\partial r_1}{\partial y} = (4x, 4y, 1) \ ,$$

tiene tercera componente positiva y por lo tanto su sentido es hacia el exterior de S. El flujo de F a través de S_1 es

$$\begin{aligned} \int_{S_1} F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r_1(x, y)) \cdot N_1(x, y) \, dxdy = \\ &= \iint_D (x, y, 8 - 4x^2 - 4y^2) \cdot (4x, 4y, 1) \ dxdy = \\ &= \iint_D 8dxdy = 16\pi. \end{aligned}$$

- Parametrizamos S_2, tapa inferior de ecuación $z = 0$,

$$r_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ : \quad r_2(x, y) = (x, y, 0) \ , \quad S_2 = r_2(D).$$

El vector normal

$$N_2(x, y) = \frac{\partial r_2}{\partial x} \wedge \frac{\partial r_2}{\partial y} = (0, 0, 1) \ ,$$

está dirigido hacia el interior de la superficie S. Calculamos,

$$\begin{aligned} \int_{S_2} F \cdot n \, dS &= \iint_D F(r_2(x, y)) \cdot (-N_2(x, y)) \, dxdy = \\ &= \iint_D (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) \ dxdy = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el flujo de F hacia el exterior de la superficie cerrada S es:

$$\int_S F \cdot n \, dS = \int_{S_1} F \cdot n \, dS + \int_{S_2} F \cdot n \, dS = 16\pi.$$

b) El flujo de F, utilizando el teorema de Gauss, puede calcularse como la integral triple en V de la divergencia de F.

$$\text{div}F(x, y, z) = 1 + 1 + 2 = 4.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_S F \cdot n \, dS &= \iiint_V \text{div}F \, dxdydz \; = \iiint_V 4 \, dxdydz = \\ &= 4 \iint_D \left(\int_0^{4-2x^2-2y^2} dz \right) dxdy = 4 \iint_D (4 - 2x^2 - 2y^2) \, dxdy\end{aligned}$$

Para hacer esta integral doble en el circulo D pasamos a coordenadas polares con

$$\rho \in]0, \sqrt{2}[\,, \quad \varphi \in]0, 2\pi[.$$

Por tanto,

$$\int_S F \cdot n \, dS = 4 \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (4 - 2\rho^2)\rho \, d\rho d\varphi = 16\pi.$$

Problemas propuestos

1. Sea D el conjunto de los puntos del plano (u, v) tales que $u^2+v^2 \leq R^2$. Sea S la superficie parametrizada por $r(u, v) = (u, v, 2u+3v+2R)$, $(u, v) \in D$. Calcule la integral de superficie

$$\int_S z\, dS.$$

Solución: $2\sqrt{14}\pi R^3$.

2. El cilindro $x^2+y^2 = 2x$ recorta una porción de superficie S en la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$. Calcule la integral de superficie

$$\int_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dS.$$

Solución: $\sqrt{2}\pi$.

3. Dada la parametrización de la superficie S,

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad r(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2),$$

donde $D = \{(u, v) \ / \ 0 \leq u \leq 4 \ , \ 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

a) Identifique la superficie, dibújela e indique el significado geométrico de los parámetros u y v en la superficie.

b) Calcule el vector normal $N(u, v)$.

c) El área de S es $\pi(65\sqrt{65} - 1)/m$, donde m es un número entero. Calcule m.

Solución: b) $N(u, v) = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u)$. c) $m = 6$.

4. Dé una parametrización del hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ en coordenadas cilíndricas y halle la expresión del vector normal.

Solución: Parametrización: $r(\rho, \varphi) = (\rho \cos \varphi,\ \rho \sin \varphi,\ \sqrt{\rho^2 - 1})$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [1, \sqrt{2}]$. Vector normal: $N = (-\dfrac{\rho^2 \cos \varphi}{\sqrt{\rho^2 - 1}}, -\dfrac{\rho^2 \sin \varphi}{\sqrt{\rho^2 - 1}}, \rho)$.

5. Parametrice la superficie reglada, situada en el primer octante, que pasa por las sinusoides: $(4+2\sin y,\ y,\ 0)$, en el plano XY, y $(0,\ y,\ 4-2\sin y)$, en el plano YZ, con $0 \le y \le 5\pi$, y cuyas rectas generatrices son paralelas a XZ. Halle la expresión del vector normal.

Solución:

Parametrización: $r(t,y) = ((1-t)(2\sin y + 4), y, t(4 - 2\sin y))$, $0 \le y \le 5\pi$, $0 \le t \le 1$. Vector normal: $N = (2\sin y - 4, -16t\cos y + 8\cos y, -2\sin y - 4)$.

6. Muchas superficies se pueden generar haciendo rotar una curva plana alrededor de un eje contenido en el mismo plano. Para este tipo de superficies, puede darse una parametrización muy útil.

Consideremos la curva de clase $\mathcal{C}^1$ contenida en el plano YZ,

$$\alpha(t) = (0, y(t), z(t)), \quad t \in [a,b] \ ,$$

situada en el semiplano con $y \ge 0$.

La superficie S generada al rotar dicha curva alrededor del eje Z, puede parametrizarse mediante la función

$$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad r(t,\theta) = (y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta, z(t)) \ ,$$

$$t \in [a,b] \ , \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Teniendo en cuenta esta parametrización,

a) interprete geométricamente los parámetros t y θ,

b) halle la expresión $N(t,\theta)$ del vector normal y demuestre que

$$\|N\| = y(t)\,\sqrt{y'(t)^2 + z'(t)^2} \ ,$$

c) si α es una curva de Jordan (cerrada e inyectiva), ¿en qué sentido debe recorrerse para que N sea exterior al volumen encerrado por S?

7. Sea S la superficie del toro de revolución obtenido al rotar alrededor del eje Z la circunferencia situada en el plano YZ de centro $(0,b,0)$ y radio a, $(a < b)$.

a) Halle el área de S.

b) Calcule el flujo hacia el exterior de la superficie S del campo

$$F(x,y,z) = \left(x - \frac{bx}{\sqrt{x^2+y^2}}, y - \frac{by}{\sqrt{x^2+y^2}}, z\right).$$

8. Demuestre el teorema de Pappus-Guldin para superficies (véase también el teorema 2.7 para volúmenes):

"El área de una superficie S de revolución generada por una curva plana al rotar alrededor de un eje perteneciente al plano de la curva (la curva se halla en uno de los dos semiplanos que parte el eje) es igual al producto de la longitud de la curva por la longitud de la circunferencia descrita por el centro de gravedad de la curva al rotar alrededor del eje".

9. Sea S la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$, y sea el campo vectorial $F(x,y,z)=(x,y,0)$. Sea n el vector normal unitario exterior a S. Calcular el valor de la integral de superficie $\int_S F \cdot n \, dS$, empleando:

a) la representación vectorial $r(u,v) = (\sin u \cos v \, , \, \sin u \sin v \, , \, \cos u)$.

b) la representación explícita $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

10. Calcule la integral del campo vectorial $F(x,y,z)=(x,y,z)$ a través de la superficie lateral del paraboloide $x^2+y^2=2az$, con $0 \leq z \leq 2a$.

Solución: Parametrización de la superficie:

$$r(x,y) = (x, y, \frac{1}{2a}(x^2+y^2)), \quad (x,y) \in D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leq 4a^2\right\}.$$

Valor de la integral: $-4\pi a^3$.

11. Calcule la integral $\int_C y^2dx + xydy + xzdz$, siendo C la curva intersección del cilindro $x^2+y^2=2y$ y el plano $y=z$.

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Stokes.

Solución: 0.

12. Calcule la integral $\int_C 2yz^2dx + xz^2dy + 3xyzdz$, siendo C la curva intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide $x^2 + y^2 = 3z$.

a) Directamente.

b) Aplicando el Teorema de Stokes.

13. Calcule el trabajo realizado por la fuerza

$$F(x, y, z) = (y - z\, ,\, z - x\, ,\, x - y),$$

para trasladar un punto material sobre la curva cerrada γ, siendo γ una parametrización de la curva dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$$

Compruebe el resultado utilizando el teorema de Stokes.

Solución: -12π.

14. Calcule $\int_S F \cdot n\; dS$, donde n es la normal exterior a la superficie cerrada S formada por los planos

$$2x + 2y + z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

siendo $F(x, y, z)$ el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (2xy + z\, ,\, y^2\, ,\, x + 3y + z).$$

15. Halle el flujo del rotacional del campo $F(x, y, z) = (xz, yz, -x^2 - y^2)$ a través de la porción de la superficie $z = \arctan(y/x)$ que se halla dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y entre los planos $z = 0$ y $z = 2\pi$.

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Stokes.

16. Calcule el flujo del campo $F(x, y, z) = (x\, ,\, y\, ,\, z)$ a través de la superficie del sólido limitado por $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, y $z = 3$.

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Gauss.

Solución: 81π.

17. Sea $F(x,y,z) = (xz, yz, -z^2)$. Calcule $\int_S F\,dS$, siendo S la cara externa del paraboloide $x^2+y^2=3z$, entre $z=0$ y $z=1$.

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Gauss.

Solución: -3π.

18. Dado el campo vectorial $F(x,y,z) = (y+\sin x, z^2+\cos y, x^3)$ y la curva $\alpha(t) = (\sin t, \cos t, \sin 2t)$, $t \in [0, 2\pi]$, halle $\displaystyle\int_\alpha F$ utilizando el teorema de Stokes.

Solución: La curva α es el borde de la superficie $S \equiv\ z = 2xy,\ x^2+y^2 \leq 1$. El valor de la integral es $-\pi^2$.

19. Calcule, por medio de una integral de superficie, la integral

$$\int_\alpha (z^3+x)dx + (x+y)dy + zdz,$$

siendo α la curva dada por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+z^2=36 \\ x+z=6 \end{array}\right\}$$

20. Halle el área de la superficie paramétrica S descrita por la parametrización:

$$r : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u^2)\ ,$$

donde $D = \{(u,v)\ /\ 0 \leq u \leq 4\ ,\ 0 \leq v \leq 2\pi\}$.

21. Calcule

$$\int_S x dy \wedge dz + yx dz \wedge dx + xz dx \wedge dy \ ,$$

siendo S la superficie externa del volumen delimitado por

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ ; \quad x \geq 0 \ ; \\ y^2 + z^2 = 1 \ ; \\ x = -1 \end{cases}$$

22. Sea S la superficie que encierra la porción de toro obtenida al revolucionar alrededor del eje Z el sector circular en el plano YZ dado por

$$(y-b)^2 + z^2 \leq a^2, \quad b - y \leq z \leq y - b \ , \quad a < b.$$

Calcule el flujo a través de dicha superficie del campo

$$F(x,y,z) = \left(x(\sqrt{x^2+y^2} - b), y(\sqrt{x^2+y^2} - b), z\sqrt{x^2+y^2} \right) .$$

a) Directamente.

b) Aplicando el teorema de Gauss.

23. Calcule $\displaystyle\int_S F dS$, donde

$$F(x,y,z) = xy\vec{\imath} + (y^2 + e^{xz^2})\vec{\jmath} + \sin(xy)\vec{k}$$

y S es la superficie de la región V limitada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, y $y + z = 2$.