GUÍA Nº3

Integrales de Superficies, Integrales de Flujo,
Teorema de la Divergencia, Teorema de Stokes.

CURSO: MA26B-02
PROFESOR: CARLOS CONCA

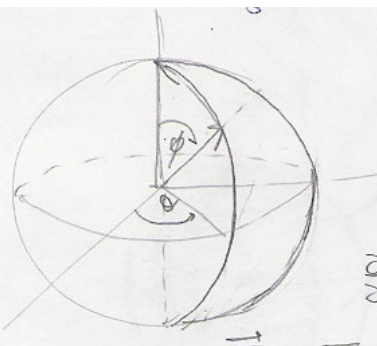
PREPARADO POR: PAULINA HERRERA, JUAN MAYORGA.

PROBLEMAS RESUELTOS

P1.

Sea S la superficie de la esfera unitaria. Sean $\vec{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\iint_S \vec{F} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r sen\phi d\phi d\theta.$$



$r=1 \Rightarrow S: \vec{r} = (sen\phi\cos\theta, sen\phi sen\theta, \cos\phi)$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (\cos\phi\cos\theta, \cos\phi sen\theta, -sen\phi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (-sen\phi sen\theta, sen\phi\cos\theta, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = sen\phi\, \hat{r}$$

$$\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi} + F_\theta \hat{\theta}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot sen\phi \cdot \hat{r}\, d\phi d\theta = (F_r \hat{r} + F_\phi \hat{\phi} + F_\theta \hat{\theta}) \cdot \hat{r}\, sen\phi d\phi d\theta$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_r sen\phi d\phi d\theta$$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r sen\phi d\phi d\theta \;//$$

P2.

Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = (h - z)$ con $h > 0$ constante y sea Π el plano tangente a la superficie del paraboloide en el punto $(0, \sqrt{h}, 0)$. Demuestre que el area de la porción del plano contenida en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ es: $\pi a^2 \sqrt{1 + 4h}$.

Sol.- Notemos

$$\Sigma_1 : \quad x^2 + y^2 = (h - z), \qquad P = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{h} \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \qquad (0)$$

$$\Sigma_2 : \quad x^2 + y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Coordenadas cilíndricas:

$$(2) \qquad \vec{p}\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\rho,\theta,z) \\ y(\rho,\theta,z) \\ z(\rho,\theta,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \rho \geq 0 \\ z \in \mathbb{R} \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{matrix}$$

Reemplazamos (2) en (0):

$$\rho^2 = h - z \iff z = h - \rho^2, \text{ así que}$$

$$\Sigma_1 : \quad \vec{\sigma}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix} x(\rho,\theta) \\ y(\rho,\theta) \\ z(\rho,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ h - \rho^2 \end{pmatrix} = \rho\hat{\rho} + (h - \rho^2)\hat{k}$$

$$\boxed{\hat{\rho} \times \hat{\theta} = \hat{k}}$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta \\ -2\rho \end{pmatrix} = \hat{\rho} - 2\rho\hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\hat{\theta}$$

$$\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \theta} = \rho\hat{k} + 2\rho^2\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 2\rho^2\cos\theta \\ 2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \rho \end{pmatrix}.$$

En el punto $P \in \Sigma_1$, $\theta = \pi/2$, $\rho = \sqrt{h}$, $z = 0$; así que

$$\left(\frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{\sigma}}{\partial \sigma}\right)\left(\sqrt{h}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2h \\ \sqrt{h} \end{pmatrix} \equiv N; \quad \text{así que}$$

$$\Pi : (\vec{X} - P) \cdot N = 0 \quad \text{i.e.} \quad 0x + 2h\left(y - \sqrt{h}\right) + \sqrt{h}\, z = 0. \qquad (3)$$

$$z = 2(\sqrt{h} - y)\sqrt{h}$$

$$\Pi_1 : \vec{\alpha}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2\sqrt{h}\,(\sqrt{h} - y) \end{pmatrix}, \qquad x^2 + y^2 \leq a^2$$

así también Π_1: $\vec{r}(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2\sqrt{h}\,(\sqrt{h} - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta) \end{pmatrix}$, $\quad D: \begin{array}{l} 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \rho < a \end{array}$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta \\ -2\sqrt{h}\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix} = \hat{\rho} - 2\sqrt{h}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \rho\cos\theta \\ -2\sqrt{h}\,\rho\cos\theta \end{pmatrix} = \rho\hat{\theta} - 2\sqrt{h}\,\rho\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} = \rho\hat{k} + 2\sqrt{h}\,\rho\cos\theta\,\hat{\theta} + 2\sqrt{h}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\rho}$$

$$\|\cdot\| = \sqrt{\rho^2 + 4h\rho^2} = \rho\sqrt{1+4h}$$

luego,

$$A(\Pi_1) = \int_D dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \rho\sqrt{1+4h}\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+4h}}{2}\, a^2\, d\theta$$

$$= \pi a^2 \sqrt{1+4h} \quad //.$$

P3.

Considere la porción σ de la superficie cilíndrica $x^2+y^2=R^2$ que se encuentra entre los planos $z=0$ y $z=R-x$. Bosqueje Σ y calcule su centro de masa suponindo densidad superficial de masa constante e igual a ρ_0.

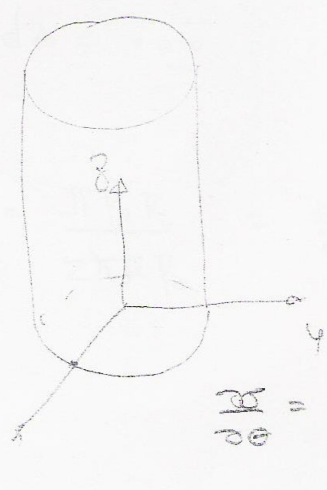
Sol.- Coordenadas cilíndricas: $\vec{p}\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x(\rho,\theta,z)\\ y(\rho,\theta,z)\\ z(\rho,\theta,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\theta\\ \rho\,\text{sen}\,\theta\\ z\end{pmatrix}$, (0)

con $\rho\geq 0$, $z\in\mathbb{R}$, $\theta\in[0,2\pi[$

$\Sigma: \; x^2+y^2=R^2 \; , \; 0\leq z\leq R-x$ (1)

Poniendo (0) en (1):

$$\begin{cases}\rho=R\\ 0\leq z\leq R-R\cos\theta = R(1-\cos\theta)\end{cases}$$



$$\Sigma: \; \vec{\sigma}(\theta,z) = \begin{pmatrix}R\cos\theta\\ R\,\text{sen}\,\theta\\ z\end{pmatrix}, \quad \theta\in[0,2\pi[, \quad z\in[0,1-\cos\theta]$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}-R\,\text{sen}\,\theta\\ R\cos\theta\\ 0\end{pmatrix} = R\hat{\theta}, \qquad \boxed{\hat{\rho}\times\hat{\theta}=\hat{k}}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \hat{k} \; ; \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}\times\frac{\partial\sigma}{\partial z} = R\hat{\theta}\times\hat{k} = R\hat{\rho}$$

Densidad $\quad f(x,y,z)=\rho_0$

$$M = \iint_\Sigma f\,dA = \rho_0\,A(\Sigma)$$

$$A(\Sigma) = \int_{\Sigma} dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} R\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi} R(1-\cos\theta)\, d\theta$$

$A(\Sigma) = 2\pi R$ luego, $M = 2\pi R \rho_0$.

$$\boxed{\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\int_{\Sigma} x\, f\, dA = \rho_0 \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} R\cos\theta\, dz\, d\theta$$

$$= \rho_0 R \int_0^{2\pi} (\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = \rho_0 R \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \pi \rho_0 R$$

$\int_{\Sigma} y\, f\, dA = \ldots$, $\int_{\Sigma} z\, f\, dA = \ldots$

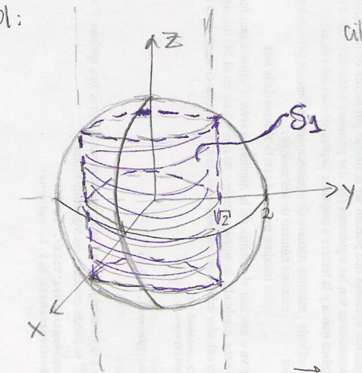
$x_G = \dfrac{\pi \rho_0 R}{2\pi R \rho_0} = \dfrac{1}{2}$, $y_G = \ldots$, $z_G = \ldots$

P4.

P) Un fluido se somete al campo de velocidades
$\vec{V}(x,y,z) = (x-yz)\hat{\imath} + (y+xz)\hat{\jmath} + (z+2xy)\hat{k}$. Sea S_1 la porción del cilindro $x^2+y^2=2$ que está dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

Calcule $\iint_{S_1} \vec{V}\cdot\hat{n}\,dA$ con $\hat{n}$: normal interior del cilindro.

Sol:



cilindro: $x^2+y^2=2$

$\Rightarrow \rho^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}$

esfera: $\rho^2 + z^2 = 4$

$2 + z^2 = 4$

$\Rightarrow z = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow \vec{r}_1 : (\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta, z)$

$\theta \in [0, 2\pi]$

$z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} = \sqrt{2}\,\hat{\theta} \ ; \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial z} = \hat{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial z} = \sqrt{2}\,\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{V}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_{S_1} \vec{V}\cdot -\hat{\rho}\sqrt{2}\,dz\,d\theta \qquad \hat{\rho} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

$$\vec{V}(\vec{r}_1) = (\sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta\, z, \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta + \sqrt{2}\cos\theta\, z, z + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)$$

$$\vec{V}(\vec{r}_1) = \sqrt{2}\,\hat{\rho} + \sqrt{2}\,z\,\hat{\theta} + (z + 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\hat{k}$$

$$\iint_{S_1} \vec{V}\cdot\hat{n}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\,\hat{\rho} + \sqrt{2}\,z\,\hat{\theta} + (z+4\cos\theta\operatorname{sen}\theta)\hat{k}\right)\cdot -\hat{\rho}\sqrt{2}\,dz\,d\theta$$

$$= -2\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dz\,d\theta = -2\cdot 2\pi \cdot 2\sqrt{2} = -8\pi\sqrt{2}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

P1.

Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x - y\cos z,\ y - x,\ z - e^{y})$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z, centrado en el origen y de radios R_0 y r_0, $(R_0 > r_0)$.

P2.

- Calcular la integral de superficie $\iint_{\Sigma} \nabla\phi \cdot d\vec{A}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y ϕ es el campo escalar $\phi(x,y,z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$.

P3.

.- Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(e^{y}\,\mathrm{sen}\,y + xy^2 z,\ e^{x} x^2 yz\cos z,\ x\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\right).$$

Calcule el flujo definido por $\vec{F}$ a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$.

Hint.- Calcule el flujo a través de las tapas.
Calcule el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas y usando el teorema de la divergencia).

P4.

(Principio de Arquímides)
"Todo cuerpo que se sumerge en un líquido experimenta un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del volumen de líquido que se desaloja."

· El empuje total que ejerce el agua sobre un objeto de superficie S está dado por

$$G = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A},$$

donde

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{cases} (0,0,\rho g(h-z)) & \text{si } z \leq h \\ (0,0,0) & \text{si } z > h, \end{cases}$$

donde g es la gravedad, ρ es la densidad del agua y h es la altura del nivel del agua.
Muestre el Principio de Arquímides.

P5.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto, acotado y tal que $\partial\Omega$ es una superficie regular orientada según la normal exterior $\vec{n}$.
· Sea $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial conservativo y de clase C^1.
Pruebe que

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \Delta\phi \, dx,$$

para un cierto campo escalar $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
El operador laplaciano esta dado mediante

$$\Delta\psi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\psi) = \nabla\cdot(\nabla\psi)$$
$$= \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}.$$

P6.

Considere $\vec{F}$ y $\vec{G}$ (campos vectoriales) y φ, f, g (campos escalares), todos de clase C^1.
Muestre que

i) $\operatorname{rot}(\nabla\varphi) = 0$, ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$,

iii) $\operatorname{div}(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot\operatorname{rot}\vec{F} - \vec{F}\cdot\operatorname{rot}\vec{G}$

iv) $\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$, v) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi\operatorname{rot}\vec{F} + \nabla\varphi\times\vec{F}$.

P7.

Sean $\vec{r} = (x,y,z)$, $r = \|\vec{r}\|$ y

$$\Sigma^+ = \partial\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : a \leq r \leq b\}, \quad (b > a > 0)$$

orientada hacia el exterior. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)\vec{r}.$$

i) Verificar que $\quad r^2 \operatorname{div} \vec{F}(\vec{r}) = \dfrac{d}{dr}\left(r^3 f(r^2)\right).$

ii) Concluir que

$$\iint_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi\left[b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2)\right].$$

• Sea C^+ una curva de extremos $O = (0,0,0)$ y $A = (0,0,a)$, regular por trozos, recorrida desde O hasta A.

iii) Calcular $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r})$.

iv) Verificar que

$$\int_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2}\int_0^a f(t)\,dt.$$

P8.

Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie regular definida por las ....

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ x^2+y^2-2ay \leq 0 \end{cases} \quad \text{si} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

donde $a > 0$.

a) Calcule $A(S)$.

b) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A}$ cuando, en coordenadas cilíndricas,

$$\vec{F} = \rho\hat{\rho} + \cos^2\theta \cdot \exp(\cos^3\theta)\,\hat{\theta}.$$

c) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$ cuando $C: \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2-2ay = 0. \end{cases}$

P9.

Sea

$$S: \ \Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \\ \theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 4\pi \end{array}.$$

a) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).

b) Si $(x_0, y_0, z_0) \in S$, mostrar que el segmento de recta horizontal de longitud unitaria que va del eje z a (x_0, y_0, z_0) está contenido en S y en el plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0).

P10.

Hallar la masa M de una superficie elipsoidal

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

cuando, en $(x,y,z) \in S$, la densidad de masa es igual a la distancia entre (x,y,z) y $(x_0, y_0, z_0) \in S$ (fijo).

P11.

Sea $S: \ z = x\,\phi\left(\frac{y}{x}\right)$, donde $\phi \in C^1$.

Probar que todos los planos tangentes a S pasan por el origen.

P12.

Sea la superficie S definida en coordenadas cilíndricas por $z = \rho^2$, $0 \le \rho \le R$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Calcule $A(S)$ y $\left| \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} \right|$ cuando $\vec{F} = x^2\hat{i} + y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$.

P13.

Supongamos que un fluido está sometido a un campo de velocidades dado por $\vec{V}(x,y,z) = (x - yz)\widehat{\imath} + (y + xz)\widehat{\jmath} + (z + 2xy)\widehat{k}$. Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sea S_2 la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Sea Ω el volumen limitado por S_1 y S_2.

(i) Calcule directamente $\displaystyle\iint_{S_1} \vec{V} \cdot \vec{n} dA$ con $\vec{n}$ la normal interior al cilindro.

(ii) Utilizando el teorema de la divergencia, calcule el flujo neto que pasa a través de las paredes de la región Ω.

(iii) Calcule directamente el flujo a través de S_2 orientada según la normal exterior a la esfera. Compruebe el teorema de la divergencia.

P14.

(a) Calcular $\displaystyle\oint_\Gamma (y^2, z^2, x^2) \cdot d\vec{r}$ donde Γ es el triángulo de vértices $(0,0,0)$, $(0,a,0)$ y $(0,0,a)$, recorridos en este orden, y compruebe el teorema de Stokes.

(b) Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Consideremos el campo definido por $\vec{F}(x,y,z) = (z\sin(x) - y^3, z\cos(y) + x^3, \cos(xy))$. Calcule $I = \displaystyle\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$. Respuesta: $I = \frac{3\pi}{4}$.

P15.

Determine cuáles de los siguientes campos son conservativos, y encuentre un potencial para aquellos que lo son:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2, 6abxz^3 - 10bx^4y, 18abxyz^2)$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (18abyz^3 - 20bx^3y^2, 18abxz^3 - 10bx^4y, 6abxyz^2)$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x)\widehat{\imath} + F_2(y)\widehat{\jmath} + F_3(z)\widehat{k}$.

(d) $\vec{F}(\rho,\theta,z) = a\rho^2\cos\theta\widehat{\rho} + a\rho^2\sin\theta\widehat{\theta} + 2az^2\widehat{k}$.

(e) $\vec{F}(r,\theta,\varphi) = -2ar\cos\theta\sin\varphi\widehat{r} - ar\cos\theta\cos\varphi\widehat{\theta} + ar\sin\theta\sin\varphi\widehat{\varphi}$.

(f) $\vec{F}(x,y,z) = e^{-ax^2-by^2-cz^2}(ax\widehat{\imath} + by\widehat{\jmath} + cz\widehat{k})$.

(g) $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{V}\cdot\vec{r})\vec{V}$ donde $\vec{V} \in \mathbf{R}^3$ es un vector constante, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es una función escalar apropiada y $\vec{r} = (x,y,z)$.

(h) $\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{V}\cdot\vec{r})(\vec{r}\times\vec{V})$, con $\vec{V} \in \mathbf{R}^3$ y f como en (g).

P16.

Las ecuaciones de Euler de un fluido en régimen estacionario y en presencia de un campo gravitacional vienen dadas por

$$\rho\nabla\vec{v}\cdot\vec{v}+\nabla p=-\rho g\widehat{k},$$

donde g es la aceleración de gravedad (constante).
(i) Demuestre la identidad vectorial

$$\nabla\vec{v}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\nabla(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-\vec{v}\times(\nabla\times\vec{v}).$$

(ii) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible ($\rho\equiv$ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli

$$\rho(v_1^2+v_2^2+v_3^2)+p+\rho gz=\text{constante}.$$

(iii) Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura $h>0$. En el fondo del estanque se practica una abertura de radio $\varepsilon<<R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique brevemente las aproximaciones que haga.

P17.

En todo lo que sigue $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ es un abierto acotado de frontera $\partial\Omega$.
(i) Demuestre la siguiente identidad de Green: dados $f\in C^2(\Omega)$ y $g\in C^1(\Omega)$, se tiene

$$\iint_{\partial\Omega}g\nabla f\cdot d\vec{S}=\iiint_{\Omega}(g\Delta f+\nabla f\cdot\nabla g)dV.$$

(ii) Consideremos la siguiente ecuación diferencial con condiciones de borde:

$$\begin{cases}\Delta u = f & \text{en} \quad \Omega\\ u = g & \text{sobre} \quad \partial\Omega\end{cases}$$

Se quiere probar que si esta ecuación admite solución entonces ésta es única. Suponga que existen dos soluciones u_1 y u_2, y definamos $w=u_1-u_2$. Pruebe que $w\equiv 0$ en Ω. Ind.: Note que $\Delta w=0$ y utilice la identidad de (i).

ALGUNOS PROBLEMAS DE CURVAS

P1.

Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad : existe un punto $\vec{P}_0$ por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (note que todo arco de circunferencia satisface esta propiedad). Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de Γ en longitud de arco.

(a) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{P}_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

donde $\vec{N}(s)$ denota el vector normal.

(b) Demuestre que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 1 - \kappa(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0 \end{aligned}$$

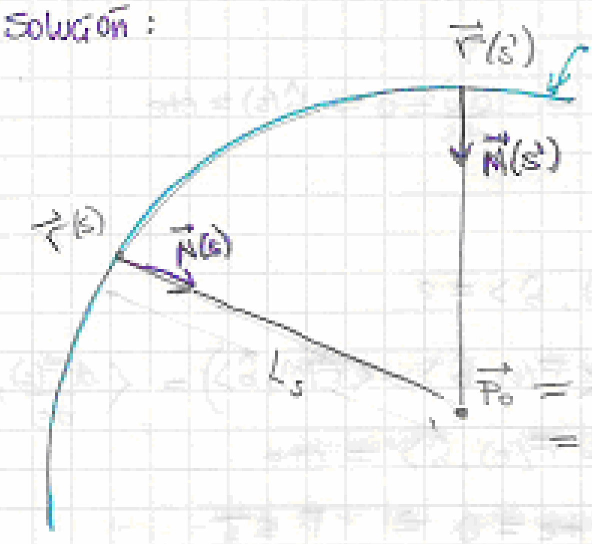
donde $\kappa(s), \tau(s)$ son la curvatura y la torsión de Γ, respectivamente.

(c) Concluya que Γ es una curva plana.

(d) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

Solución :

a)



$$\begin{aligned} \vec{P}_0 &= \vec{r}(s) + \vec{N}(s)\cdot t \qquad t \in \mathbb{R} \\ &= \vec{r}(s') + \vec{N}(s')\cdot t' \qquad t' \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se sabe que $\forall\, s \in [0, L(\Gamma)] \quad \vec{P}_0 \in L_s$

$\exists\ \varphi(s) \in \mathbb{R} \ \text{m} \quad \vec{P}_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\cdot\vec{N}(s)$

$$\begin{aligned} \varphi : [0, L(\Gamma)] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longrightarrow \varphi(s) \end{aligned}$$

B) Derivando P_0 c/r a s (P_0 es un punto del círculo) $\vec{P}_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$ ctes.
queda:

$$\vec{0} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} + \frac{d}{ds}\left(\varphi(s)\cdot\vec{N}(s)\right)$$

$$\vec{0} \underset{\text{parametrización natural}}{=} \hat{t} + \varphi'(s)\cdot\vec{N}(s) + \varphi(s)\frac{d\vec{N}(s)}{ds}$$

Por Frenet $\frac{d\vec{N}(s)}{ds} = -k(s)\hat{t} + \tau\hat{b}$ $\quad(\vec{N}(s) = \hat{n}(s))$

$$\Rightarrow \vec{0} = \hat{t} + \varphi'(s)\hat{n}(s) + \varphi(s)\left[-k(s)\hat{t} + \tau\hat{b}\right]$$

$$\vec{0} = \hat{t}\left(1 - \varphi(s)k(s)\right) + \varphi'(s)\hat{n}(s) + \varphi(s)\tau\cdot\hat{b}(s)$$

$\Rightarrow$ cada una de las componentes debe ser nula

$$\Rightarrow \quad 1 - \varphi(s)k(s) = 0 \quad (1)$$
$$\varphi'(s) = 0 \quad (2)$$
$$\varphi(s)\cdot\tau(s) = 0 \quad (3)$$

C) de (3) $\quad \tau(s)\varphi(s) = 0 \Rightarrow \tau(s) = 0$ y $\varphi(s) = 0$
de (1) $\quad \varphi(s) = \frac{1}{k(s)} \neq 0 \Rightarrow \tau(s) = 0$

Como $\tau \equiv 0$ entonces la Γ es plana.
por Frenet

$$\left\|\frac{d\hat{b}}{ds}\right\| = \left\|-\tau\hat{n}\right\| = \tau = 0 \Rightarrow \frac{d\hat{b}}{ds} = 0 \Rightarrow \hat{b}(s) = cte$$

Sea $\pi : \langle \vec{x} - \vec{r}(0), \hat{b}\rangle = 0$

Veamos que $\Gamma \in \pi$: $\langle \vec{r}(s) - \vec{r}(0), \hat{b}\rangle = ?$

Obviamente $\vec{r}(0) \in \pi$ y además $\frac{d}{ds}\left(\langle\vec{r}(s), \hat{b}\rangle - \langle\vec{r}(0), \hat{b}\rangle\right) = \left\langle \frac{d\vec{r}(s)}{ds}, \hat{b}\right\rangle$

$= \langle \hat{t}, \hat{b}\rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{r}(s) - \vec{r}(0), \hat{b}\rangle = cte$

Pero como $\vec{r}(0) \in \pi \Rightarrow cte = 0 \Rightarrow \Gamma \subseteq \pi$

D) Bastar notar que $\|\vec{P}_0 - \vec{r}(s)\| = \|\varphi\cdot\hat{n}(s)\| = \varphi = cte.$

P2.

Dada una curva C, se define la *evoluta* de C como el lugar geométrico de sus centros de curvatura.

Sea Γ la hélice circular de parametrización: $\vec{\sigma}(\theta) = (a\cos(\theta), a\,\mathrm{sen}(\theta), h\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, y a una constante real no nula.

(i) Pruebe que la evoluta de la hélice Γ es una hélice con la misma generatriz y mismo paso h. Denotémosla Γ'.

(ii) Demuestre que la evoluta de Γ' es Γ.

(iii) Pruebe que las curvaturas de Γ' y Γ son iguales, calcule el cuociente entre las torsiones de ambas curvas.

(i) $\mathrm{evol}(\Gamma) = \vec{\sigma}(\theta) + \dfrac{1}{k(\theta)}\hat{n}(\theta) \quad \theta \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\vec{\sigma}(\theta)}{d\theta} = (-a\,\mathrm{sen}\theta, a\cos\theta, h) \qquad \text{ojo: en el problema } h = \frac{\bar{h}}{2\pi}$$

$$\left\| \frac{d\vec{\sigma}(\theta)}{d\theta} \right\| = \sqrt{a^2+h^2}$$

$$\hat{t}(\theta) = \frac{d\vec{\sigma}(\theta)}{d\theta} \Big/ \left\| \frac{d\vec{\sigma}(\theta)}{d\theta} \right\| = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} (-a\,\mathrm{sen}\theta, a\cos\theta, h)$$

$$\frac{d\hat{t}(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} (-a\cos\theta, -a\,\mathrm{sen}\theta, 0)$$

$$\left\| \frac{d\hat{t}(\theta)}{d\theta} \right\| = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\hat{n}(\theta) = \frac{d\hat{t}}{d\theta} \Big/ \left\| \frac{d\hat{t}}{d\theta} \right\| = \frac{a(-\cos\theta, -\mathrm{sen}\theta, 0)}{\sqrt{a^2+h^2}} \frac{\sqrt{a^2+h^2}}{|a|} = sg(a)(-\cos\theta, -\mathrm{sen}\theta, 0)$$

$$sg(a) = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

$$k(\theta) = \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\hat{t}}{d\theta} \right\| \Big/ \left\| \frac{d\vec{\sigma}(\theta)}{d\theta} \right\| = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+h^2}} \Big/ \sqrt{a^2+h^2} = \frac{|a|}{a^2+h^2}$$

$$\mathrm{evol}(\Gamma) = \vec{\sigma}'(\theta) = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\theta, h\theta) - \frac{a^2+h^2}{|a|} sg(a)(\cos\theta, \mathrm{sen}\theta, 0)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}'(\theta) = \Big(\underbrace{\Big(a - \frac{(a^2+h^2)}{|a|} sg(a)\Big)}_{B} \cos\theta,\ B\,\mathrm{sen}\theta,\ h\theta \Big)$$

$$B = a - \frac{a^2+h^2}{|a|} sg(a) = \frac{a|a| - sg(a)(a^2+h^2)}{|a|} = \frac{a^2 sg(a) - sg(a)(a^2+h^2)}{|a|} = -\frac{h^2}{a}$$

$$\left| \frac{1}{k(s)} \right| = \left| \frac{a^2+h^2}{|a|} \right| > |a|$$

(ii)

$$a' = a - \frac{sg(a)(a^2+h^2)}{|a|} = \frac{a|a| - sg(a)(a^2+h^2)}{|a|}$$

pero $a|a| = a^2 \cdot sg(a)$

$$\Rightarrow a' = \frac{sg(a)}{|a|}(a^2 - a^2 - h^2) = \frac{-sg(a)h^2}{|a|}$$

$\Gamma' \longrightarrow \Gamma''$ (evoluta de Γ')

$$\Rightarrow a'' = -\frac{sg(a')\,h^2}{|a'|}$$

$$-sg(a') = -sg\left(-sg\frac{(a)h^2}{|a|}\right) = -sg(-sg(a)) = sg(a)$$

$$|a'| = \frac{h^2}{|a|}$$

$$\Rightarrow a'' = \frac{sg(a)\cdot h^2}{h^2/|a|} = sg(a)\cdot|a| = a$$

Con esto se demuestra que la evoluta de Γ' es Γ

(iii) $k_\Gamma(\theta) = \dfrac{|a|}{a^2+h^2}$, $k_{\Gamma'}(\theta) = \dfrac{|a'|}{a'^2+h^2}$

$$k_{\Gamma'}(\theta) = \frac{h^2/|a|}{\frac{h^4}{a^2}+h^2} = \frac{1/|a|}{(h^2+a^2)\cdot\frac{1}{|a|^2}} = \frac{|a|}{a^2+h^2} = k_\Gamma(\theta)$$

Calculemos la torsión τ de Γ:

$$\tau(\theta) = -\hat{n}\cdot\frac{d\hat{B}}{d\theta}\Big/\left\|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right\|$$

$\hat{t}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}(-a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta, h)$; $\hat{n}(\theta) = -sg(a)(\cos\theta, \text{sen}\,\theta, h)$

$\hat{b}(\theta) = \hat{t}(\theta)\times\hat{n}(\theta)$

$\hat{t}(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+h^2}}\hat{\theta} + \dfrac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\hat{z}$ (cilíndricas)

$\hat{n}(\theta) = -sg(a)\,\hat{\rho}$

$$\Rightarrow \hat{b}(\theta) = \hat{t}(\theta)\times\hat{n}(\theta) = \frac{a\,sg(a)}{\sqrt{a^2+h^2}}\hat{z} - \frac{sg(a)h}{\sqrt{a^2+h^2}}\hat{\theta} \rightarrow \frac{d\hat{b}}{d\theta} = \frac{sg(a)h}{\sqrt{a^2+h^2}}\hat{\rho}$$

$$\Rightarrow \tau_\Gamma = \frac{-1}{\sqrt{a^2+h^2}}\cdot -\frac{(sg(a))^2 h}{\sqrt{a^2+h^2}} = \frac{h}{a^2+h^2}$$

$$\tau_{\Gamma'} = \frac{h}{a'^2+h^2} \qquad a' = -\frac{sg(a)h^2}{|a|} \Rightarrow a'^2 = \frac{h^4}{a^2}$$

$$\circ\circ\circ \quad \frac{\tau_\Gamma}{\tau_{\Gamma'}} = \circ\circ\circ = \frac{h^2}{a^2}$$