MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: 17 de Agosto de 2017

Auxiliar 2

- *Integral de línea:* $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$.
- Si la parametrización de una curva Γ es parte de un sistema de coordenadas ortogonales (variando sólo 1 parámetro, digamos u), entonces la integral de línea se expresa como $\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(u)) \cdot h_u \hat{u} du$.
- Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice conservativo si existe un campo escalar (que llamaremos potencial) f tal que $\vec{F} = \nabla f$.
- Si $\vec{F}$ es conservativo con potencial f y Γ es una curva parametrizada por $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, entonces $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$
- *Teorema de Green* Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ región acotada tal que ∂S es una curva simple, cerrada, regular por trozos, orientada en sentido antihorario. Sean $M(x,y)$, $N(x,y)$ campos escalares de clase C^1 en un abierto que contiene a S y ∂S. Entonces $\oint_{\partial S} M dx + N dy = \int\int_S (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})$
- *Teorema de Stokes:* Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientable regular por pedazos, ∂S curva cerrada simple regular por trozos. Sea $\vec{F}$ campo vectorial de clase C^1 en $S \cup \partial S$. Si ∂S se recorre respetando la regla de la mano derecha respecto a la elección de la normal a S, entonces $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$.
- Coordenadas cilíndricas $(x,y,z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)), z)$.
  $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$, $h_z = 1$.
- Coordenadas esféricas $(x,y,z) = (r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\phi))$.
  $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$, $h_\phi = r$.

P1. Calcule

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{H} = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2 + y)$ y C es la curva cerrada correspondiente a los 3 segmentos rectos que conectan sucesivamente los puntos $A = (0,0,0)$, $B = (0,1,0)$ y $C = (0,0,1)$ regresando nuevamente a A.

P2. Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña.

a) Deducir una parametrización de Γ sabiendo que satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$, con $a \geq 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.

b) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{y^2}{2}, y(x-z), -\frac{y^2}{2})$. Calcule el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de Γ.

P3. Calcule el área de la región de $\mathbb{R}^2$ delimitada por el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,0)$ y $(1,1)$, y la curva $(x-1)^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

P4. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$\vec{F} = M(x,y)\hat{i} + N(x,y)\hat{j} = \frac{x+y}{x^2+y^2}\hat{i} - \frac{x-y}{x^2+y^2}\hat{j}$$

Sea $I = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde γ es una curva contenida en $\mathbb{R}^2$ simple, suave, cerrada y regular por trozos.

a) Muestre que $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$.

b) Calcule el valor de I cuando γ encierra a origen y cuando no.

P5. Calcule $\int\int_S rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S}$, para $\vec{F} = (y, z, x^2)$, donde S es el manto de un cono truncado de radios inferior y superior a y b respectivamente, con $b < a$, y altura h, con base en el plano XY y el centro de la base en el origen.

P6. Propuestos (Sí, voy a subir pauta igual)

a) *[Integrales de línea]* Calcule

$$\int_\Gamma (x-z)dx + (z-y)dy + (x-y)dz$$

con Γ la intersección del cilindro de ecuación $x^2+y^2=1$ y el plano de ecuación $x+z=1$ en orientación positiva.

b) *[Green]* En la P4, sea $\gamma = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x=\cos^3(t), y=\sin^3(t), t\in[0,\pi/2]\}$. (Esta curva va desde el punto (1, 0) hasta el punto (0,1)). Calcule el valor de I en este caso aplicando adecuadamente el teorema de Green.

c) *[Stokes]* Sea S la parte del manto de $z=1-x^2$, para $0\le x\le 1$, $-2\le y\le 2$. Si $\vec{F}=xy\hat{\imath}+yz\hat{\jmath}+xz\hat{k}$, calcule $\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r}$.