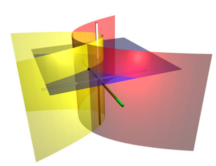
MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Jueves 31 de agosto de 2017

Auxiliar 4: Preparación Control 1

- Se definen los factores de escala de un sistema de coordenadas curvilineas $\vec{r}(u,v,w)$ por $h_u = \| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \|$, $h_v = \| \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \|$, $h_w = \| \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} \|$.
- $\hat{u} = \frac{1}{h_u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$. Además $\hat{v}$ y $\hat{w}$ se definen análogamente.
- $div(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w) \right]$
- $rot(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$
- Teorema de la divergencia Gauss: Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, acotado, de frontera $\partial\Omega$ regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : \Omega \cup \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1. Entonces $\int\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \int\int\int_{\Omega} div(\vec{F}) dV$.
- *Teorema de Stokes:* Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie orientable regular por pedazos, ∂S curva cerrada simple regular por trozos. Sea $\vec{F}$ campo vectorial de clase C^1 en $S \cup \partial S$. Si ∂S se recorre respetando la regla de la mano derecha respecto a la elección de la normal a S, entonces $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$.
- Coordenadas cilíndricas $(x,y,z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)), z)$. $h_\rho = h_z = 1$, $h_\theta = r$.
- Coordenadas esféricas $(x,y,z) = (r\sin(\phi)\cos(\theta), r\sin(\phi)\sin(\theta), r\cos(\phi))$. $h_r = 1$, $h_\theta = r\sin(\phi)$, $h_\phi = r$.

P1. Considere un sistema de coordenadas cilíndricas parabólicas, que se define en términos de las coordenadas cartesianas de la siguiente forma:

$$x = \sigma\tau$$
$$y = \frac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2)$$
$$z = z$$



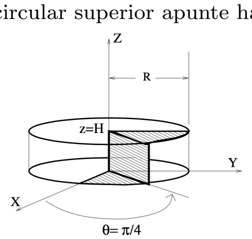
a) Calcule los factores escalares correspondientes (h_σ, h_τ, h_z).

b) Calcule los valores unitarios $\hat{\sigma}$, $\hat{\tau}$, $\hat{z}$. Verifique que son ortogonales y encuentre el orden positivo.

c) Sea $F = \begin{pmatrix} \frac{\tau^3}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} + \frac{z\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \\ \frac{-\sigma\tau^2}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} + \frac{z\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$

Calcule la divergencia y el rotor de este campo.

P2. La superficie S corresponde a la unión de 3 pedazos, como se muestra en la siguiente figura, orientada de modo que la normal de sector circular superior apunte hacia arriba. Se define $\vec{F} = \rho^2 \hat{z} + z\rho\hat{\rho}$.



a) Usando la definición de integral de trabajo, calcule la circulación $\int_{\partial S} \vec{F} \cdot \hat{t} dr$

b) Calcule la misma circulación, pero utilizando el Teorema de Stokes.

P3. Considere la superficie definida por

$$S = \{(\cos(z)\cos(\theta), \cos(z)\sin(\theta), z) \mid \theta \in [0, 2\pi],\ z \in [0, \pi/2]\}$$

a) Encuentre una parametrización para S.

b) Escoja una orientación para S y calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$ para los siguientes campos vectoriales:

I. $\vec{F}(r,\varphi,\theta) = (exp(r^3) + \cos(\varphi))\hat{\theta}$

II. $\vec{F}(r,\varphi,\theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}$