MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Jueves 31 de agosto de 2017

Auxiliar 5: Funciones Complejas y Repaso C1

- Usaremos las notaciones $z = x + iy$, $f = u + iv$.
- Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Decimos que f es derivable (en el sentido complejo) en $z_0 \in \Omega$ si existe el límite $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$. Si f es derivable entodo $z_0 \in \Omega$, diremos que es holomorfa en Ω.
- **Teorema:** $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ ssi es diferenciable (Fréchet-derivable) en (x_0, y_0) como función de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemman:
  $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$
  En tal caso $f'(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$.
- Se tiene el álgebra de derivadas y la regla de la cadena como en $\mathbb{R}$.
- $H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } \Omega\}$.

P1. Considere $f(x + iy) = \sqrt{|x||y|}$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Muestre que f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en el origen, pero no es diferenciable en 0.

P2. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega, f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f mediante $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ y si $\Delta f = 0$ en Ω se dice que f es armónica en Ω. Deduzca que $f \in H(\Omega) \Rightarrow f$ es armónica en Ω.

P3. *a*) Encuentre todos los posibles $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales

$$f(z) = ay(b^2x^2 + 2\cos(bx)) + iv(x, y)$$

es holomorfa en todo $\mathbb{C}$ (para algún $v(xy)$ adecuado).

b) Si f es holomorfa y verifica $\operatorname{Re}(f'(z)) = 0$, ¿qué se puede decir de $f(z)$?

P4. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ el volumen de la figura: el fondo es una región R del plano XY de borde C orientado en sentido antihorario, y su parte superior tiene la misma forma, está ubicada a una altura h y es paralela al fondo, mientras que la parte lateral es paralela al eje Z.

a) Aplique el teorema de Stokes al campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ sobre $C = \partial R$ y obtenga la relación

$$\int_C F_1 dx + F_2 dy = \int_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

que se conoce como el teorema de Green.

b) Aplique el teorema de la divergencia al campo vectorial $\vec{G}(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y))$ sobre Ω y obtenga la relación

$$\int_C G_1 dy - G_2 dx = \int_R \left(\frac{\partial G_1}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y}\right) dxdy$$

que se conoce como el teorema de la divergencia en 2 dimensiones.

c) Muestre que el teorema de Green y el teorema de la divergencia en 2 dimensiones son equivalentes.

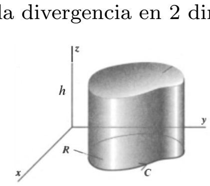

Figura 1: Región Ω