MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gonzalo Flores García
Auxiliar: Ilana Mergudich Thal
Fecha: Jueves 12 de octubre de 2017

Auxiliar 9

- Sea $(u_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{R}$. Se define el límite superior de la sucesión como $\limsup_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k$. Es el supremo de los puntos de acumulación de u_n.
- Sea $(c_n)_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$, dado $z \in \mathbb{C}$ se define $S_N(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} c_k(z-a)^k$.
- Radio de convergencia: $R = 1/\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
- S_N converge si $|z-a| < R$ y diverge si $|z-a| > R$
- La serie $S(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ es holomorfa en $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-a| < R\}$ con $S'(z) = kc_k(z-a)^{k-1}$
- $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$
- Teo Cauchy-Goursat: Si f es holomorfa en un abierto Ω simplemente conexo, entonces $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$ para todo camino cerrado, regular por trozos y simple Γ contenido en Ω.
- Teo de la curva: Sea f holomorfa en Ω salvo un número finito de puntos $\{p_j\}_{j=1}^{n}$ y sea Ω abierto conexo que encierra a tales puntos. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para que los caminos $\partial D(p_j, \epsilon)$ estén contenidos en la región encerrada por Γ y no se intersecten entre si. Entonces $\displaystyle\oint f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\partial D(p_j,\epsilon)} f(z)dz$ donde todas las curvas están recorridas en sentido antihorario.
- Fórmula de Cauchy: Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $adh(D(p,r)) \subseteq \Omega$. Entonces $\forall z_0 \in D(p,r)$ $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(p,r)} \dfrac{f(z)}{z-z_0} dz$, donde $\partial D(p,r)$ está recorrida en sentido antihorario.

P1. Sea J la función definida mediante la serie de potencias

$$J(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(n!)^2 2^{2n}}$$

Muestre que J es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y verifique además que es solución de la ecuación

$$w'' + \frac{1}{z}w' + w = 0.$$

P2. Calcule

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^2+2z} dz$$

donde Γ es el cuadrado de vértices $1-i$, $1+i$, $-1+i$ y $-1-i$ en recorrido sentido antihorario.

P3. Calcule

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z^{-1}-2)(z-2)} dz$$

P4. Encuentre la serie de potencias de la función $h(z) = \log(1+z^2)/z$ en torno al punto $z = 0$ e indique su radio de convergencia (utilice la rama del logaritmo tal que $\mathrm{Im}(\log(w)) \in (-\pi, \pi]$).