MA3402-1. Estadística 2017.
Profesor: Raul Gouet.
Auxiliares: Diergo Marchant y Raimundo Saona.

Auxiliar 2

Lunes 14 de Agosto

H1. Procesos temporales y muestreo real

Suponga que es el dueño de una tienda poco visitada y lo contacta una persona, que asegura tener poderes sobrenaturales, que quiere venderle su servicio de "atracción de clientela". Usted, como buen ingeniero(a), le propone contratarlo sólo luego de 'aprobar' un test estadístico que refleje sus capacidades.

Modele la situación y proponga un test basado en el tiempo que transcurre entre la llegada de un cliente y el próximo.

Si realiza el muestreo varios días, durante las 12:00 y las 14:00, ¿cómo tomará en cuenta el último 'dato' del día?

Proponga un estimador suficiente para poder resumir y guardar la información de cada día en el computador. ¿Cómo puede simplificar el problema?

H2. Modelo de Poisson

Considere una m.a.s. $(X_1, ..., X_n)$, donde $X_i \sim Poisson(\lambda)$. Queremos estimar $g(\lambda) = \mathbb{P}_\lambda(X = 0) = e^{-\lambda}$.

(a) Considere

$$\widehat{g}_1(X) = e^{-\overline{X}_n} \quad ; \quad \widehat{g}_2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i=0} \quad ; \quad \widehat{g}_3(X) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\overline{X}_n}$$

y estudie su sesgo.

(b) Encuentre un estadístico suficiente para $\{\mathbb{P}_\lambda\}_{\lambda>0}$.

(c) ¿Es completo?

(d) Identifique el estimador EIVUM para $g(\lambda)$.

H3. Modelo Pareto

Considere una m.a.s. $(X_1, ..., X_n)$, donde $X \sim Pareto(\theta, c)$, con $c > 0$ conocido, ie:

$$\mathbb{P}_\theta(X_i \leq x) = \left[1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^c\right] \mathbb{1}_{[\theta,\infty]}(x)$$

(a) Encuentre un estadístico suficiente para θ, con $\Theta = (0, \infty)$.

(b) ¿Es completo?

(c) Propongo un estimador de θ, y calcule el EIVUM cuando $nc > 1$.

Auxiliar 2

Poisson

$X_i \sim \text{Poisson}(\lambda)$ y

$$\hat{g}_1(X) = e^{-\bar{X}_n} \quad ; \quad g_2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i=0} \quad ; \quad \hat{g}_3(X) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n\bar{X}_n}$$

son estimadores de $e^{-\lambda}$.

Estudie sesgo

$$\mathbb{E}_\lambda(\hat{g}_1(X)) = \mathbb{E}_\lambda\left(e^{-\bar{X}_n}\right)$$
$$= \mathbb{E}_\lambda\left(\prod_{i=1}^{n} e^{-X_i/n}\right)$$
$$= \left[\mathbb{E}_\lambda\left(e^{-X_i/n}\right)\right]^n \quad ; \quad \text{i.i.d.}$$

Ya que,

$$\mathbb{E}_\lambda\left(e^{-X_i/n}\right) = \sum_{k\geq 0} e^{-k/n}\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{\left(\lambda e^{-1/n}\right)^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda}\, e^{\lambda e^{-1/n}} = e^{-\lambda(1-e^{-1/n})},$$

se tiene que

$$\mathbb{E}_\lambda(\hat{g}_1(X)) = e^{-n\lambda(1-e^{-1/n})} \quad \left(\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}\right)$$

$\therefore$ $\hat{g}_1(X)$ es asintóticamente insesgado.

$$\mathbb{E}_\lambda(\hat{g}_2(X)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{X_i=0}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}_\lambda(X_i=0)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

$\therefore$ $\hat{g}_2(X)$ es insesgado

$$\mathbb{E}_\lambda(\hat{g}_3(X)) = \left[\mathbb{E}_\lambda\left((1-1/n)^{X_i}\right)\right]^n \quad ; \quad \text{i.i.d.}$$

Ya que,

$$\mathbb{E}_\lambda\left((1-1/n)^{X_i}\right) = \sum_{k\geq 0}(1-1/n)^k\, e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$= e^{-\lambda}\, e^{\lambda(1-1/n)} = e^{-\lambda/n},$$

se tiene que

$$\mathbb{E}_\lambda(\hat{g}_3(X)) = \left[e^{-\lambda/n}\right]^n = e^{-\lambda}.$$

$\therefore \hat{g}_3(X)$ es insesgado

Encuentre un estadístico suficiente.

Notamos que

$$\begin{aligned} f(x\mid\lambda) &= f(x_1, \dots, x_n \mid \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \mathbb{1}_{x_i \in \mathbb{N}} \\ &= e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!} \mathbb{1}_{x \in \mathbb{N}^n} \end{aligned}$$

Luego, $\begin{aligned} T: \mathcal{X} &\to \mathcal{T} = \mathbb{R}_+ \\ \vec{x} &\longmapsto \sum x_i \end{aligned}$ es estadístico suficiente

pues

$$f(x\mid\lambda) = \underbrace{e^{-\lambda} \lambda^{\sum x_i}}_{=: \, g_\lambda(T(x))} \underbrace{\frac{\mathbb{1}_{x\in\mathbb{N}^n}}{\prod x_i!}}_{h(x)}$$

¿Es completo?

Probar completitud no es fácil.

El verdadero enunciado es

$\forall g: \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ tq $\forall \theta \in \Theta \quad g(T) \in L^1(\mathbb{P}_\theta)$ se tiene que:

$$\left(\forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{E}_\theta(g(T)) = 0\right) \Rightarrow \left(\forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{P}_\theta(g(T) = 0) = 1\right)$$

Chequear que esto es lo que se necesita para la unicidad del EIVUM.

Asumamos que $\|g\|_\infty < \infty$ (no es necesariamente cierto) y que $n = 1$. Luego, $g(\Sigma x_i) \in L^1(\mathbb{P}_\lambda)$ $\forall \lambda > 0$ y se tiene que si:

$$\mathbb{E}_\lambda(g(X_1)) = \sum_{k \geq 0} g(k)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 0 \quad \forall \lambda > 0,$$

tomando $\lambda \to 0$, obtenemos que $g(0) = 0$. Luego,

$$\mathbb{E}_\lambda(g(X_1)) = \sum_{k \geq 1} g(k)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= \sum_{k \geq 0} g(k+1)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\lambda}{(k+1)} = 0 \quad \forall \lambda > 0,$$

tomando $\lambda \to 0$, obtenemos que $g(1) = 0$.

Sucesivamente se deduce que $g \equiv 0$ y así

$$\forall \lambda > 0 \quad g(X_1) = 0 \quad \mathbb{P}_\lambda\text{-c.s.}$$

Identifique el EIVUM.

Ya que $\hat{g}_3(x) = \hat{g}_3(T(x))$ y $\hat{g}_3$ es insesgado,

$$\hat{g}_3(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n \bar{x}_n}$$ es el EIVUM.

PARETO

$X_i \sim \text{Pareto}(\theta, c)$, con $c>0$ conocido, i.e:

$$P_\theta(X_i \leq x) = \left[1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^c\right] \mathbb{1}_{x \in [\theta, \infty)}$$

Encuentre un estadístico suficiente.

Bueno,

$$\mathbb{P}_\theta(X_i \leq x) = F_\theta(x) \quad ; \text{ su función de distribución.}$$

Luego,

$$f(\bar{x}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

donde

$$f(x_i|\theta) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbb{P}_\theta(X_i \leq x)\Big|_{x=x_i}$$

$$= c\,\frac{\theta^c}{x_i^{c+1}}\, \mathbb{1}_{x_i > \theta}.$$

Así,

$$f(\bar{x}|\theta) = c^n \theta^{cn} \mathbb{1}_{x_{(1)} > \theta} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{c+1}} \quad ; \quad x_{(1)} = \min_{i=1,\dots,n}(x_i)$$

$$=: \underbrace{c^n \theta^{cn} \mathbb{1}_{x_{(1)} > \theta}}_{g_\theta(x_{(1)})} \cdot \underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} x_i^{c+1}}}_{h(x)}$$

Concluimos que

$$T(X) = X_{(1)} = \min_i X_i \quad \text{es estadístico suficiente.}$$

¿Es completo?

De nuevo, simplifiquemos la vida y supongamos que $\|g\|_\infty < \infty$ y $n=1$,

así $\forall \theta > 0 \quad g(X_{(1)}) \in L^1(\mathbb{P}_\theta)$

Luego,

$$\mathbb{E}_\theta(g(X_{(1)})) = \int_\theta^\infty g(x)\, \frac{c\,\theta^c}{x^{c+1}}\, dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_\theta^\infty \frac{g(x)}{x^{c+1}}\, dx = 0 \qquad \forall \theta > 0$$

Así tenemos que $\forall\, 0<\alpha<\beta$

$$\int_\alpha^\beta \frac{g(x)}{x^{c+1}}\, dx = 0$$

Si g fuese continua, podríamos concluir que

$$\frac{g(x)}{x^{c+1}} = 0 \qquad \forall x>0 ,$$

de donde $g \equiv 0$.

Si no queremos tomar ese supuesto, definimos

$$\nu([\theta,\infty)) = \int_\theta^\infty \frac{g(x)}{x^{c+1}}\, dx = 0 \qquad \text{una medida (con signo)}$$

Notamos que $\{[\theta,\infty) : \theta>0\}$ es un π-sistema y ν es σ-finita en $[\alpha,\infty)$, ν se extiende a una única medida en $[\alpha,\infty)$ (con $\alpha>0$) (teorema en Hahn).

Como 0 (medida nula) es extensión de ν, tenemos que

$\forall A \in \mathcal{B}([\alpha,\infty))$ $\nu(A) = \int_A g(x)/x^{c+1} dx = 0$ (no sólo en intervalos)

Luego es posible deducir que $g|_{[\alpha,\infty)} \equiv 0$ μ-c.s, con μ la medida de Lebesgue.

Como $\alpha>0$ es arbitrario, se tiene que:

$$g(x) = 0 \qquad \mu\text{-c.s.} \qquad \forall x>0$$

Y como $\mathbb{P}_\theta \ll \mu$, $g(x.) \equiv 0$ $\mathbb{P}_\theta$-c.s. $\forall \theta>0$

¿Qué quiero decir?

... Mejor encontramos condiciones suficientes para que T sea completo, más nos vale...

Proponga el EIVUM cuando $nc > 1$.

Necesitamos un estimador de θ en función de $T(X) = X_{(1)}$

Proponemos

$$\tilde{g}(X) = X_{(1)}$$

¿Es insesgado?

Recordemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\theta(X_{(1)} \le x) &= 1 - \mathbb{P}_\theta(X_{(1)} > x) \\
&= 1 - \mathbb{P}_\theta(X_1, \ldots, X_n > x) \qquad ; \; X_{(1)} = \min_i X_i \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta(X_i > x) \qquad , \; iid \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \mathbb{P}_\theta(X_i \le x)\right] \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - \left[1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^c\right] \mathbb{1}_{x>\theta}\right] \\
&= \left(1 - \prod_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\theta}{x}\right)^c\right]\right) \mathbb{1}_{x>\theta} \\
&= \left(1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{nc}\right) \mathbb{1}_{x>\theta}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad X_{(1)} \sim Pareto(\theta, nc) \qquad \forall \theta > 0$$

Luego

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\theta(\tilde{g}(X)) &= \int_\theta^\infty x \, nc \, \frac{\theta^{nc}}{x^{nc+1}} \, dx \\
&= nc \, \theta^{nc} \int_\theta^\infty \frac{1}{x^{nc}} \, dx
\end{aligned}$$

(nc>1 hace que la integral sea finita) $\quad = nc \, \theta^{nc} \left(\left. \frac{x^{-nc+1}}{-nc+1} \right|_\theta^\infty \right)$

$$= -nc \, \theta^{nc} \, \frac{\theta^{-nc+1}}{-nc+1} = \frac{nc}{nc-1} \theta$$

$$\therefore \quad \hat{g}(X) = \frac{nc-1}{nc} X_{(1)} \quad \text{es el EIVUM.} \; \blacksquare$$

Ahora nos damos cuenta que para probar la completitud de $X_{(n)}$ no necesitabamos suponer que $n=1$, pues

$$X_{(n)} \sim \text{Pareto}(\theta, nc)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}_\theta(g(X_{(n)})) = \int_\theta^\infty g(x)\, nc \frac{\theta^{nc}}{x^{nc+1}}\, dx \overset{!}{=} 0 \quad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_\theta^\infty \frac{g(x)}{x^{nc+1}}\, dx = 0 \quad \forall \theta > 0$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = 0 \quad \mu\text{-c.s.}$$

$$\Rightarrow \quad g(X_{(n)}) = 0 \quad \mathbb{P}_\theta\text{-c.s.} \quad \forall \theta > 0$$