MA3402-1. Estadística 2017.
Profesor: Raul Gouet.
Auxiliares: Diego Marchant y Raimundo Saona.

Auxiliar 6

Lunes 11 de Septiembre

Definición (Test de Neyman-Pearson)
Sean H_0, H_1 hipótesis simples, $H_i = \theta_i$ con $i = 0, 1$. Definimos un test ϕ^* para H_0 v/s H_1 a través de la región de rechazo

$$R* := \{x \in X : f_{\theta_1}(x) \geq k_\alpha f_{\theta_0}(x)\},$$

donde k_α es una constante que se fija de manera que

$$\mathbb{P}_\theta(R^*) = \alpha\,,$$

con $\alpha \in [0, 1]$ pequeño.

Obs. En el caso absolutamente continuo k_α siempre existe, pero en el caso discontinuo puede no existir y se debe recurrir a test aleatorizados.

Lema (Neyman-Pearson) El test de Neyman-Pearson ϕ^* es el test de nivel α más potente, ie: tomando ϕ otro test, se tiene que

$$\mathbb{P}_{\theta_1}(R^*) \geq \mathbb{P}_{\theta_1}(R_\phi)$$

C1. Significancia, Función de potencia

Considere el problema de identificar si ciertas muestras son o no ruido blanco, o bien si hay información suficiente para afirmar positivamente a que las muestras no son sólo "ruido al rededor del cero". Tome $X_1, ..., X_n$ una m.a.s., con $x \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ con μ desconocido y considere

$$H_0 : \mu = 0$$
$$H_1 : \mu \neq 0$$

Calcule la significancia y la función de potencia del test ϕ definido por

$$R := \{(x_1, ..., x_n) : \sqrt{n}|\overline{x}_n| > 2\}\,.$$

C2. Test Neyman-Pearson Simple

Considere $X_1, ..., X_n$ m.a.s., con $X \sim F_\theta$ donde

$$F_\theta(t) = t^\theta \quad \forall t \in (0, 1) \quad \theta \in \{1, 2\}$$

Construya el test de Neyman-Pearson para $\alpha = 0{,}05$ para $H_0 : \theta = 1$ y $H_1 : \theta = 2$.

A1. Neyman-Pearson, Hipótesis no simples

Considere $X_1, ..., X_n$ m.a.s., con $X \sim \Gamma_{\lambda,k}$ donde k es conocido, ie:

$$f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{\Gamma(k)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$$

Construya el test de Neyman-Pearson de significancia α para $H_0 : \lambda = \lambda_0$ y $H_1 : \lambda = \lambda_1$, con $\lambda_1 > \lambda_0$.

Muestre que existe un test uniformemente más potente para las hipótesis $H_0 : \lambda = \lambda_0$ y $H_1 : \lambda > \lambda_0$.

Bonus: Tomando $k = \frac{1}{n}$, muestre que la función potencia del test es $1 - (1-\alpha)^{\lambda/\lambda_0}$, ie:

$$\mathbb{P}_\lambda(R_{N-P}) = 1 - (1-\alpha)^{\frac{\lambda}{\lambda_0}}$$

A2. Minimización de otros criterios

Sea X_1 una observación del modelo con densidad

$$f_\theta(x) = (1+\theta)x^\theta \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\,,$$

donde θ es desconocido. Considere $H_0 : \theta = 1$ y $H_1 : \theta = 2$.

- Determine el test de Neyman-Pearson con nivel $\alpha_0 = 0{,}3$.
- Calcule la potencia del test de Neyman-Pearson.
- Indique si el test rechaza la hipótesis nula cuando se observa $x_1 = 0{,}93$.
- Considere otro criterio (ya no maximizar potencia, fijada una significancia) dado por la suma ponderada de los errores de tipo I y II, con pesos 1 y 2 respectivamente. Determine $\tilde{R}$ la región crítica del test que minimiza este nuevo criterio.
- Calcule el nivel de significancia y potencia de $\phi_{\tilde{R}}$.
- Indique si el nuevo test rechaza la hipótesis nula cuando se observa $x_1 = 0{,}93$.