

MA3402-1 Estadística

Profesor: Raúl Gouet B.

Auxiliares: Diego Marchant D. y Raimundo Saona U.



Auxiliar 7

2 de Octubre de 2017

Definición 1. (Test de Razón de Verosimilitud) Sean las hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ v/s $H_1 : \theta \in \Theta_1$ donde H_0 y H_1 pueden ser compuestas. Definimos el TRV de nivel α como el test de región crítica

$$R_{TRV} = \left\{ x \in \mathcal{X} : \Lambda(x) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_1} f_{\theta}(x)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} f_{\theta}(x)} \geq k_{\alpha} \right\}$$

donde k_{α} se determina de manera que $\forall \theta \in \Theta_0, \mathbb{P}_{\theta}(R_{TRV}) \leq \alpha$

Definición 2. (TRV monótona) Sea θ parámetro real. Sea X v.a. con densidad $p_{\theta}(x)$ tal que para $\theta_0 < \theta_1$ la razón $p_{\theta_1}(x)/p_{\theta_0}(x)$ es función creciente de $T(X)$ algún estadístico, entonces para $H_0 : \theta \leq \theta_0$ v/s $H_1 : \theta > \theta_0$, existe un test UMP dado por

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } T(x) > C \\ \gamma & \text{si } T(x) = C \\ 0 & \text{si } T(x) < C \end{cases}$$

donde C y $\gamma \in [0, 1]$ están dados por

$$\mathbb{E}_{\theta_0}[\phi(X)] = \alpha$$

P1 Suponga que dispone de dos muestras iid denotadas X_1, \dots, X_n e Y_1, \dots, Y_n de los modelos normales $\mathcal{N}(\mu, 1)$ y $\mathcal{N}(\nu, 1)$ donde μ, ν son parámetros reales y desconocidos. Considere las hipótesis $H_0 : \mu^2 + \nu^2 = 1$ vs $H_1 : \mu^2 + \nu^2 \neq 1$. Determine el modelo paramétrico y muestre que el TRV tiene como región crítica al conjunto

$$R = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n} | (\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} - 1)^2 > k\}$$

donde k es una constante apropiada (que no necesita calcular).

P2 Suponga que usted trabaja para una fábrica que produce chips procesadores. Una máquina produce los chips de manera independiente, los cuales luego son empaquetados en cajas de N chips. Se requiere evaluar si se están cumpliendo los estándares de calidad en dos niveles de la producción, revisando en ambos una cantidad pequeña de n chips, puesto que la revisión es costosa. Pruebe que para ambos casos existe un test UMP y encuentre una expresión para ellos:

- El desempeño de la máquina: Se quiere testear la hipótesis $p \leq p_0$ versus $p > p_0$ con p la probabilidad de producir un chip defectuoso.
- La cantidad de chips defectuosos por caja: Se quiere testear la hipótesis $D \leq D_0$ versus $D > D_0$ con D la cantidad de chips defectuosos en la caja.