P1

a) <u>Par hereditario</u>:

- $\emptyset \in \mathcal{I}$ pues $|\emptyset \cap B_j| = 0 \leq d_j$.
- Si $I \subseteq J$ y $J \in \mathcal{I}$ tenemos que:

$$|I \cap B_j| = |J \cap B_j| \leq d_j.$$

<u>Matroide</u>:

Sea B una base. Notemos que

$$|B \cap B_j| = d_j \quad \forall j.$$

Si no $|B \cap B_j| < d_j$ para algun j. Luego existe $e \in B_j \setminus B$ tal que $|(B+e) \cap B_j| \leq d_j$ (además las otras ecuaciones se mantienen iguales) $\times$

Luego.

$$|B| = \sum_{j=1}^{|J|} |B \cap B_j| = \underbrace{\sum_{j=1}^{|J|} d_j}_{cte}$$

$\Rightarrow$ Todas las bases tienen mismo cardinal

b) Definamos

$$\mathcal{I}_1 = \{ F \subseteq E : F \text{ acíclico} \}$$

$\tilde{\mathcal{I}}_2 = \{ F \subseteq E : |F \cap c^{-1}(\{i\})| \leq 1, \ \forall i \in [k] \}$ ← Multicolor

Notemos que $(E, \tilde{\mathcal{I}}_1)$ es matroide y $(E, \tilde{\mathcal{I}}_2)$ también (es matroide de partición).

Notemos que:

$I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ es decir I es acíclico multicolor.

Luego:

$$\exists \text{ árbol generador multicolor} \Leftrightarrow \max_{X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |X| = n-1.$$

Luego basta con calcular un independiente común máximo. Esto se puede hacer en

$$O(\underbrace{|E|^3}_{m^3} \cdot \underbrace{L}_{\substack{\text{tiempo} \\ \text{máximo de} \\ \text{independencia}}})$$ con el alg. de intersección.

Chequear independencia en $\mathcal{I}_1$ tarda $O(m+n)$ (DFS)

Chequear independencia en $\mathcal{I}_2$ tarda $O(n)$.

→ El algoritmo tarda $O(m^3(m+n))$

P2| Sea $M = (E, \mathcal{I}(G))$ la matroide gráfica.

a) Notemos que:

Existen dos árboles generadores

$\Leftrightarrow$ T es base de $\mathcal{I}$ y $E \setminus T$ contiene una base.

$\Leftrightarrow$ T es base de $\mathcal{I}$ y $\exists B$ base t.q. $T \cap B = \emptyset$.

$\Leftrightarrow$ T es base de $\mathcal{I}$ y $T \in \mathcal{I}^*$.

$\Leftrightarrow$ $T \in \mathcal{I}$, $T \in \mathcal{I}^*$, $|T| = n-1$.

$\Leftrightarrow$ $|T| = n-1$, $T \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^*$.

Luego basta con chequear $\max_{X \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^*} |X| = n-1$.

Para calcular $\max_{X \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}^*} |X|$ hay que saber testear independencia.

Independencia en $\mathcal{I}$ tarda $O(n+m)$ (DFS)

Independencia en $\mathcal{I}^*$ tarda $O(n+m)$ (Borrar el cjto a testear y hacer DFS para chequear conexidad.)

Luego esto tarda con alg. de intersección

$O(|E|^3 \cdot L) = O(m^3(n+m))$.

b) Hay dos árboles generadores disjuntos si y sólo si:

$$n-1 = \max_{I \in \mathcal{I} \cap \mathcal{I}'} |I|$$

Teo. Intersección

$$= \min_{X \subseteq E} r_M(X) + r_{M^*}(E \setminus X).$$

$r_M(X) = |$ acíclico más grande en $X|$.

sean $C_1, \dots, C_k$ las comp conexas en (G, X)

$$= \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|C_i| - 1}$$

en cada comp. conexa es un árbol.

$$= n - cc(V, X).$$

$$r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E \setminus X) - r_M(E)$$

$$= |X| + n - cc(E \setminus X) - (n - \underbrace{cc(G, E)}_{1})$$

$$= |X| - cc(E \setminus X) + 1.$$

Luego se necesita:

$$n-1 = \min_{X \subseteq E} n - cc(X) + |E \setminus X| - cc(X) + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \min_{X \subseteq E} |E \setminus X| - 2cc(X) + 2.$$

$$\Leftrightarrow \qquad |E \setminus X| - 2cc(X) + 2 \geq 0 \qquad \forall X \subseteq E.$$

$$\Leftrightarrow \qquad |E \setminus X| \geq 2(cc(X) - 1). \qquad \forall X \subseteq E.$$

P3|

a) Sea $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subseteq X$, luego para todo $A \subseteq X$.

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$

$$|B| = \underbrace{|B \setminus A|}_{\leq |X \setminus A|} + |B \cap A|$$

$$\leq |X \setminus A| + \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|B_i \cap A|}_{\leq r_i(A)}$$

$$\leq |X \setminus A| + r_i(A)$$

como esto es $\forall B, \forall A$.

$$\Rightarrow r(X) = \max_{\substack{B \subseteq X \\ B \in \mathcal{F}}} |B| \leq \min_{A \subseteq X} |X \setminus A| + \sum_{i=1}^{k} r_i(A).$$

b) No mostraremos que son matroides (pues es largo).

s_1 rango de $M = (E, \mathcal{I}_1)$

$s_1(X) = |\{$el S más grande tq. es ind. en cada coord$\}|$.

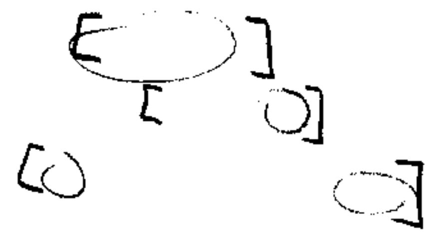
$$= \underbrace{|X_1|}_{\text{ind. más grande en } M_1} + |X_2| + \ldots + |X_k|$$

$$= r_1(X) + r_2(X) + \ldots + r_k(X)$$

S_2 función rango $M=(E, \mathcal{I}_2)$

$$s_2(X) = |\{e \in S \text{ más grande tq } \pi_i(S) \text{ disjuntos par a par}\}|$$

$$= \left|\bigcup_{i=1}^{k} \pi_i(X)\right|.$$



Obs: Notemos que $r(X) = \max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I|$.

c) Por el teo. de intersección de matroides.

$$\max_{I \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2} |I| = \min_{Q \subseteq X'} s_1(Q) + s_2(X' \setminus Q)$$

Sean I^* y Q^* conjuntos que alcanzan la igualdad anterior luego:

$$r(X) = |I^*| = s_1(Q^*) + s_2(X' \setminus Q^*)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} r_i(\pi_i(Q^*))\right] + \left|\bigcup_{i=1}^{k} \pi_i(X' \setminus Q^*)\right|$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} r_i(\pi_i(Q^*))\right] + \left|\bigcup_{i=1}^{k} X \setminus \pi_i(Q^*)\right|$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k} r_i(\pi_i(Q^*))\right] + \left|X \setminus \bigcap_{i=1}^{k} \pi_i(Q^*)\right|$$

Definamos

$A = \bigcap_{i=1}^{k} \pi_i(Q^*)$

Notemos que $r_i(\pi_i(a^*)) \geqslant r_i(A)$.

luego

$$r(X) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{k} r_i(A)\right] + |X \setminus A|$$

$$\geqslant \min_{A \subseteq X} |X \setminus A| + \sum_{i=1}^{k} r_i(A)$$

d) Veamos que r verifica las prop. anteriores.

sea B un particionable máx.

- $r(X) = |B| \leq |X|$.
- Si $X \subseteq Y$ entonces el particionable de X lo es de Y, luego $r(X) \leq r(Y)$.
- Veamos la submodularidad.

$$r(X) = |X \setminus A| + \sum_{i=1}^{k} r_i(A)$$ A el que alcanza el mín

$$r(Y) = |Y \setminus B| + \sum_{i=1}^{k} r_i(B)$$ B el que alcanza el mín.

$$r(X) + r(Y)$$
$$= |X \setminus A| + |Y \setminus B| + \sum_{i=1}^{k} (r_i(A) + r_i(B)).$$

$$\geq \left|(X \setminus A) \cup (Y \setminus B)\right| + \left|(X \setminus A) \cap (Y \setminus B)\right| + \sum_{i=1}^{k} r_i(A \cup B) + r_i(A \cap B).$$

$$= \left|(X \cup Y) \setminus (A \cup B)\right| + \left|(X \cap Y) \setminus (A \cap B)\right| + \sum_{i=1}^{k} r_i \underbrace{(A \cup B)}_{\text{contiene base de la unión}} + r_i \underbrace{(A \cap B)}_{\text{contiene base de la intersección}}$$

$$\geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y).$$

e) Basta con notar que I_1 e I_2 se pueden construir a tiempo pol

P4)

a) Tomemos

$$M' = \underbrace{M \vee M \vee \dots \vee M}_{\text{unión de matroides}}$$

Luego $(M', \mathcal{I}')$ es matroide y:

$$\mathcal{I}' = \left\{ X = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} X_i : X_i \in \mathcal{I}_i \right\}$$

$$= \left\{ X = \dot{\bigcup_{i=1}^{k}} X_i : X_i \in \mathcal{I} \right\}$$

$$= \left\{ X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i : X_i \in \mathcal{I} \right\}$$

$\subseteq$ es claro

$\supseteq$ siempre podemos "disjuntar" y mantener indep.

El rango máx de la unión de k indeps será:

$$r_{M'}(S) = \min_{U \subseteq S} |S \setminus U| + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} r_i(U)}_{r(U)}$$

$$= \min_{U \subseteq S} |S \setminus U| + k\,r(U)$$

b) Notemos que S puede ser cubierto si y sólo si:

$$\max_{\substack{A \text{ unión} \\ \text{de } k\text{-indep.}}} |A| = |S|$$

$\Rightarrow$ Claro

$\Leftarrow$ siempre se tiene

$$\iff \max_{\substack{A \text{ unión} \\ \text{de } k \text{ indep}}} |A| \geq |S|$$

$$\iff \min_{U \subseteq S} |S \setminus U| + kr(U) \geq |S|$$

$$\iff \forall U \subseteq S \qquad |S \setminus U| + kr(U) \geq |S|$$

$$\iff \forall U \subseteq S \qquad kr(U) \geq \underbrace{|S| - |S \setminus U|}_{=|U|}$$

Esto era lo pedido. En la gráfica nos dice que:

E puede ser cubierto por k árboles generadores si y sólo si

$$\forall X \subseteq E \qquad kr(X) \geq |X|$$

$$\iff \forall X \subseteq E \qquad k \cdot (n - cc(G, X)) \geq |X|$$

c)

Sea $U \subseteq S$, $\{B_i\}_{i=1}^{k}$ k bases.

$\Leftarrow]$

Notemos que

$$r(B_i) = r(S)$$

$$r(B_i \cap U) \leq r(U)$$

Luego.

$$r(S) - r(U) \leq r(B_i) - r(B_i \cap U)$$
$$= |B_i| - |B_i \cap U| = |B_i \cap S \setminus U|.$$

Sumando esto:

$$k(r(S) - r(U)) \leq \Big| \underbrace{\bigcup_{i=1}^{k} B_i}_{\subseteq S} \cap S \setminus U \Big| \leq |S \setminus U|$$

$\Rightarrow]$ Sea $M' = \underbrace{M \vee M \vee \ldots \vee M}_{k\text{-veces}}$

Recordemos

$$\mathcal{I}' = \{ X = \bigcup_{i=1}^{k} X_i : X_i \in \mathcal{I} \}$$

Luego

Por hipótesis tenemos que

$$\forall U \quad |S \setminus U| + kr(U) \geq kr(S)$$

$$\Rightarrow \quad \min_{U \subseteq S} |S \setminus U| + kr(U) \geq kr(S)$$

$$\Rightarrow \quad \max_{\substack{X \subseteq S \\ X \in \mathcal{I}'}} |X| \geq kr(S) \quad (*)$$

Sea X que alcanza la igualdad anterior.

$$X = \bigodot_{i=1}^{k} X_i \quad \text{con cada } X_i \text{ ind.}$$

luego $\quad |X_i| \leq r(S) \quad \forall X_i$

Por tanto la única forma de alcanzar la igualdad $(*)$ es si $|X_i| = r(S)$

$\Rightarrow$ X_i son k bases disjuntas.

En la gráfica E contiene k árboles generadores disjuntos si y sólo si

$$\forall X \subseteq E \quad |E \setminus X| + kr(X) \geq kr(E)$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall X \subseteq E \quad |E \setminus X| \geq k(r(E) - r(X))$$

$$\iff \forall X \subseteq E \quad |E \setminus X| \geq k\big(n - \underbrace{cc(E)}_{1} - (n - cc(X))\big)$$

$$\iff \forall X \subseteq E \quad |E \setminus X| \geq k\big(cc(X) - 1\big)$$

és u generalització de P2 b)