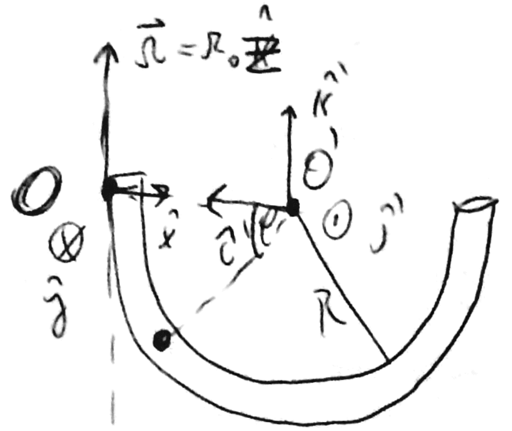
1)



$\vec V(0) = \vec 0$

$\vec r(0) = \vec 0$

• $O' = \{\hat k', \hat i, \hat j'\}$ gira de tal manera que $\hat i$ apunte al origen, con velocidad $\Omega_0 \hat z$, y posición:

$$\vec R_{O'} = R\underbrace{\hat\rho}_{(\hat x\cos\theta + \hat y\,\mathrm{sen}\,\theta)}$$

$$\dot{\vec R}_{O'} = R\dot\theta\hat\theta = R\Omega_0\hat\theta$$

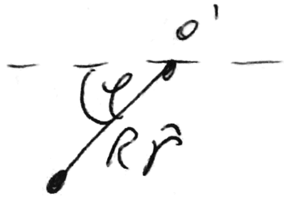
$$\ddot{\vec R}_{O'} = -R\Omega_0^2\hat\rho$$

• Veamos ahora la posición de la partícula respecto a O'

$$\vec r' = R\hat r$$

$$\dot{\vec r}' = R\dot\varphi\,\hat\varphi$$

$$\ddot{\vec r}' = R(\ddot\varphi\hat\varphi - \dot\varphi^2\hat r)$$



En cilíndricas:

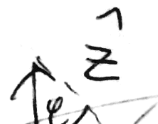
$O' = \{\hat r, \hat\varphi, \hat j\}$

$O = \{\hat\rho, \hat\theta, \hat z\}$

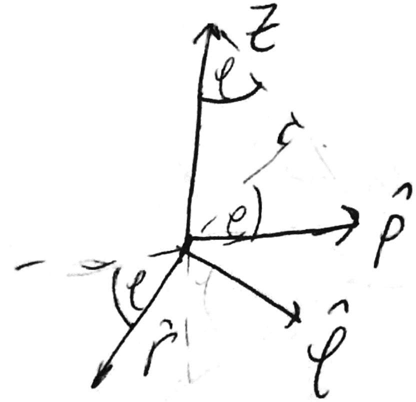
• Veamos las fuerzas ficticias.

$$\vec F_{trans} = -m\ddot{\vec R}_{O'}$$

$$= +mR\Omega_0^2\hat\rho$$



$= \cancel{-m\Omega_0^2}$



$$\vec{F}_{cent} = -m\,\Omega_0\,\hat{z} \times (\Omega_0\,\hat{z} \times R\,\hat{r})$$

$$= -m\,\Omega_0^2 R\,\hat{z} \times (\hat{z} \times \hat{r})$$

$$= m\,\Omega_0^2 R \cos\varphi\,\underbrace{(\hat{r}\cos\varphi - \hat{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi)}_{=-\hat{\rho}}$$

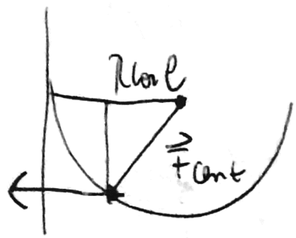
$$\hat{z} = -(\hat{r}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi)$$

$$\rightarrow \hat{z} \times \hat{r} = +\cos\varphi\,\hat{j}$$

$$\hat{z} \times \hat{j} = -(-\hat{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi + \hat{r}\cos\varphi)$$

$$= \hat{\rho}$$

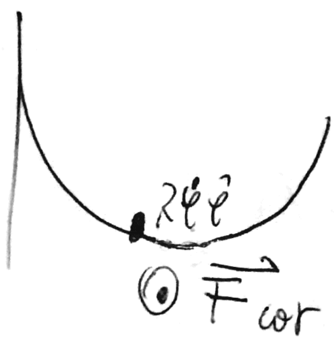
$$\hat{z} \times \hat{\varphi} = -\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{j}$$



$$\vec{F}_{cor} = -2m\,\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'$$

$$= -2m\,\Omega_0 R\,\dot{\varphi}\,\hat{z} \times \hat{\varphi}$$

$$= 2m\,\Omega_0 R\,\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{j}$$



así, tenemos que

$$\vec{F}_{neta} = \underbrace{R(\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - \dot{\varphi}^2\hat{r})}_{\ddot{\vec{r}}'} - (\vec{F}_{tras} + \vec{F}_{cent} + \vec{F}_{cor})$$

$$\vec{N} = mR(\ddot{\varphi}\hat{\varphi} - \dot{\varphi}^2\hat{r}) - (\underbrace{mR\Omega_0^2\hat{\rho} - mR\Omega_0^2\cos\varphi\,\hat{\rho}}_{mR\Omega_0^2(1-\cos\varphi)\hat{\rho}} + 2mR\Omega_0 R\dot{\varphi}\,\mathrm{Sen}\,\varphi)$$

Notamos que $\vec{N}$ no tiene componente en $\hat{\varphi}$, y que $\hat{\rho} = (\hat{\varphi}\,\mathrm{Sen}\,\varphi - \hat{r}\cos\varphi)$

$$\hat{\varphi}: \quad 0 = mR\ddot{\varphi} - mR\Omega_0^2(1-\cos\varphi)\,\mathrm{Sen}\,\varphi \quad (1)$$

$$\hat{r}: \quad N_{\hat{r}} = +mR\dot{\varphi}^2 + mR\Omega_0^2(1-\cos\varphi)\cos\varphi \quad (2)$$

$$\hat{j}: \quad N_{\hat{j}} = 2m\Omega_0 R\dot{\varphi}\,\mathrm{Sen}\,\varphi \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow \ddot{\varphi} = \Omega_0^2 \left(\operatorname{Sen}\varphi - \operatorname{Sen}\varphi \cos\varphi \right)$$

$$= \Omega_0^2 \left(\operatorname{Sen}\varphi - \frac{\operatorname{Sen} 2\varphi}{2} \right) \Big/ \int_0^{\dot{\varphi}} d\dot{\varphi} \int_0^{\varphi} d\varphi$$

$$\rightarrow \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \Omega_0^2 \left(-\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{4} \right)_0^{\varphi}$$

$$= \Omega_0^2 \left(-\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{4} + \frac{3}{4} \right)$$

Sale cuando $\varphi = \pi$

$$\rightarrow \dot{\varphi}(\pi) = \Omega_0 \sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right)}$$

$$= \Omega_0 \sqrt{4} = 2\Omega_0$$

y la velocidad absoluta es

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \Omega_0 \hat{z} \times \vec{r}'$$

$$= R\dot{\varphi}\hat{\varphi} + \Omega_0 R \, \hat{z} \times \hat{r}$$

$$= R\dot{\varphi} \left(\hat{\varphi} + \cos\varphi \, \hat{\jmath} \right)$$

Con $\varphi = \pi$, tenemos que $\hat{\jmath} = -\hat{\theta}$ y $\hat{\varphi}(\pi) = \hat{z}$

$$\dot{\vec{r}}_{salida} = 2\Omega_0 R \left(\hat{z} + \hat{\theta} \right) \;//$$

(b) (1), (2) y (3) tomando $\varphi = \pi$ y $\dot{\varphi} = 2\Omega_0$

(1) $\rightarrow \ddot{\varphi} = 0$

(2) $\rightarrow N_{\hat{r}} = -mR \cdot 4\Omega_0^2 + mR\Omega_0^2 \cdot 2(-1)$

$= -mR\Omega_0^2(4+2) = -6mR\Omega_0^2$

(3) $\rightarrow N_{\hat{j}} = 0$

//

P2) Manera I: Usando $\vec{L}$

• $\vec{w}$ es paralelo a uno de los ejes principales del sistema, por lo tanto

$$\vec{L}_0 = I^0_{sis}\dot{\theta}\hat{k} + \vec{K}$$

$I^0_{sis} = I^0_{barra} + Ml^2$, pues para efectos de rotación r/a O, el disco actua como masa puntual. K es el momento angular aportado por la rotación del disco, es constante pues no se halla torque sobre el disco, que correspondería a $I^{cm}_{disco} W_1 \hat{k}$ [Recordar que $\vec{L}_0 = \underbrace{\vec{L}_{cm}}_{I_0^{cm} w_1} + \underbrace{\vec{R}_{cm} \times \vec{P}_{cm}}_{ml^2\dot{\theta}}$]

• el torque neto es:

$$\vec{T}_0 = \left(-Mgl\operatorname{Sen}\theta - mg\frac{l}{2}\operatorname{Sen}\theta\right)\hat{k}$$

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = \vec{T}_o \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g l \operatorname{sen}\theta\,(2M+m)}{2} \cdot \frac{1}{\frac{ml^2}{3} + Ml^2}$$

$$I^{o}_{barra} = \frac{ml^2}{3}$$

$$= -\frac{g \operatorname{sen}\theta\, 3(2M+m)}{l\ 2(m+3M)}$$

Con desviaciones pequeños, $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\left(\frac{2M+m}{m+3M}\right)\theta$$

Frecuencia $\rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{2M+m}{3M+m}\right)\frac{g}{l}$

Metodo II: Conservación de la energía

La energía del sistema es

$$E = \frac{I_{sis}\,\dot{\theta}^2}{2} - \frac{mgl}{2}\cos\theta - Mgl\cos\theta + K$$

donde K es la energía rotacional del disco c/r a su centro de masa, es constante

$$E \text{ cte} \rightarrow \quad 0 = I_{sis}\,\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + \left(M + \frac{m}{2}\right) g l \sin\theta\,\dot{\theta}$$

$$\rightarrow \quad \ddot{\theta} = -\frac{g l \sin\theta \left(M + \frac{m}{2}\right)}{I_{sis}}$$

$$= -\frac{3g}{2l}\left(\frac{2M+m}{3M+m}\right)\sin\theta$$

De donde se obtiene que la frecuencia de pequeñas oscilaciones es $\omega^2 = \frac{3g}{2l}\left(\frac{2M+m}{3M+m}\right)$

Metodo III: Lagrangiano

$$T = \frac{I_{sis}\dot{\theta}^2}{2} + K, \quad V = -\frac{mgL}{2}\cos\theta - MgL\cos\theta$$

$$\rightarrow \mathcal{L} = \frac{I_{sis}\dot{\theta}^2}{2} + gl\cos\theta\left(\frac{m}{2} + M\right)$$

aproximando al segundo orden, y omitiendo constantes

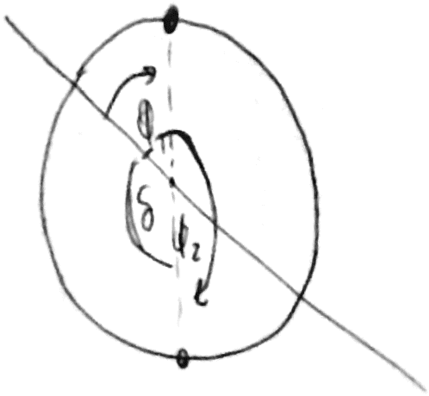
$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \rightarrow \mathcal{L} = \frac{I_{sis}\dot{\theta}^2}{2} - \frac{gl\theta^2}{2}\left(\frac{m}{2} + M\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \rightarrow I_{sis}\ddot{\theta} + gl\theta\left(\frac{m}{2} + M\right)$$

$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{gl\left(\frac{m}{2} + M\right)}{I_{sis}}\theta$$

$$\rightarrow w^2 = \frac{3g}{2l}\left(\frac{2M + m}{3M + m}\right)$$

P3 • 2 coordenadas generalizadas: ϕ_1 y ϕ_2



$$T = \frac{mR^2\dot{\phi}_1^2}{2} + \frac{mR^2\dot{\phi}_2^2}{2}$$

$$V = \frac{K}{2}\left(R\left(\phi_2-\phi_1\right)\right)^2 + \frac{K}{2}\left(R\left(\phi_1+\delta\right)^2\right)$$

$$\delta = 2\pi - \phi_2$$

$$\rightarrow V(\phi_1,\phi_2) = \frac{K}{2}R^2\left(\phi_2-\phi_1\right)^2 + \frac{K}{2}R^2\left(\phi_1-\phi_2+2\pi\right)^2$$

• $T = \begin{bmatrix} mR^2 & 0 \\ 0 & mR^2 \end{bmatrix}$, facil de encontrar

• Hay dos maneras de encontrar $\mathbb{V}$, encontrando el equilibrio y haciendo el cambio de variable, ~~o~~ y encontrar $\mathbb{V}$ al ~~ojo~~, o calculando el Hessiano en el equilibrio para V. Usualmente, es constante, por lo que no importa donde se evalue. el Hessiano de V se define como

$$\mathbb{V} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial\phi_i\,\partial\phi_j}\left(\phi_1^{eq},\phi_2^{eq}\right)\right]_{i,j}$$

y resulta ser igual a $\mathbb{V}$. en este caso

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} 2KR^2 & -2KR^2 \\ -2KR^2 & 2KR^2 \end{bmatrix}$$

• ahora buscamos w t al que

$$\det\left(-w^2\mathbb{T} + \mathbb{V}\right) = 0$$

$$\det\left(R^2\begin{bmatrix} 2k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} - w^2R^2\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\rightarrow \det\left(\begin{bmatrix} 2k - w^2m & -2k \\ -2k & 2k - w^2m \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\rightarrow (2k - w^2m)^2 - 4k^2 = 0$$

$$\rightarrow (2k - w^2m)^2 = 4k^2$$

$$\rightarrow 2k - w_1^2m = 2k, \quad 2k - w_2^2m = -2k$$

$$\rightarrow w_1^2 = 0, \quad w_2^2 = \frac{4k}{m}$$

y los modos normales son

$$\hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\phi_1 = Ce^{iw_1t}$

$\phi_2 = Ce^{iw_1t}$

$\phi_1 = Ce^{iw_2t}$

$\phi_2 = -Ce^{iw_2t}$

Da vueltas,

no hay frecuencia