Auxiliar 5: Teoremas de Derivadas

28 de Diciembre 2017

P1. Sea $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en (a, b) y estrictamente positiva. Demostrar que existe un $c \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{f(a)}{f(b)} = e^{(a-b)\frac{f'(c)}{f(c)}}$$

P2. A partir del desarrollo de Taylor en torno a 0 de $(x+a)^n$ con $n \geq 1$ un entero, demuestre la fòrmula del Binomio de Newton:

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$$

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable y sea sea $a \in \mathbb{R}$. Determine:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) + f(a - h) - 2f(a)}{h^2}$$

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f(2) = 0$. Se define la función $F(x) = (x - 1)^2 f(x)$. Aplicar el teorema del valor medio adecuadamente para probar que existe un $\xi \in (1, 2)$ tal que $F''(\xi) = 0$

P5. Considere una función que cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} f'' + f &= 0 \\ f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Muestre que necesariamente $f = 0$

P6. Sea f continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b). Muestre que existe un $\xi \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{bf(a) - af(b)}{b - a} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

P7. Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x) = \ln(\cos(x))$ hasta el orden 3, en torno a $x = 0$ y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$ para $x \in (-\pi/4, \pi/4)$.

P8. Este problema está dedicado a determinar el cono de superficie mínima circunscrito a una esfera de radio $R > 0$ fijo. Para ello:

(a) Considere la esfera de radio $R > 0$ y el cono de altura h y base circular de radio r circunscrito a la esfera. Pruebe que:

$$\frac{h - R}{R} = \frac{\sqrt{r^2 + h^2}}{r}$$

(b) Determine las dimensiones del cono (h y r) tal que se cumpla la condición de poseer superficies (manto y base) mínima estando circunscrito a la esfera. Indique el valor de dicha superficie.