Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Cálculo Diferencial e Integral 2017-3

Control 3

P1)

a) (3.0 ptos.) Sea $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una función integrable y par. Pruebe, **usando sumas de Riemann**, que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

b) (3.0 ptos.) Para $p \in \mathbb{N}$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(3n+2k)^p}{n^{p+1}}$$

P2)

a) (3.0 ptos.) Considere la función definida por la regla

$$g(x) = \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin t dt$$

donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.
Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $g''(x) + g(x) = f(x)$. Usando esto, demuestre que si $f(0) > 0$, entonces g tiene un mínimo local en $x = 0$.

b) (3.0 ptos.) Sea $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ una función biyectiva y derivable en $(0, \infty)$. Muestre que

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$$

satisface $g'(x) = f(x) + xf'(x)$. Concluya que $g(x) = x \cdot f(x)$.

P3)

a) (2.0 ptos.) Calcule el área encerrada por las rectas $x = 0, x = \pi$ y las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$.

b) (2.0 ptos.) Considerando $a > 0$, determine el valor de:

$$J = \int_0^{2a} x\sqrt{a^2 - (x-a)^2}dx - \int_{-2a}^{2a} x\sqrt{4a^2 - x^2}dx$$

<u>Indicación</u>: Identifique expresiones conocidas.

c) (2.0 ptos.) Considere la elipse $\mathcal{E}$ de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, con $a, b > 0$.
Escriba la longitud total s de la elipse $\mathcal{E}$ (no la calcule) y demuestre que la longitud de cualquier elipse $\mathcal{E}_\lambda$ de semiejes $\lambda \cdot a$ y $\lambda \cdot b$ con $\lambda > 0$ es $s_\lambda = \lambda \cdot s$.

Tiempo: 3 horas.

Formulario:

$$A = \int_a^b h(x)dx, \quad V = \pi\int_a^b h^2(x)dx, \quad V = 2\pi\int_a^b xh(x)dx, \quad V = \int_a^b A(x)dx, \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$