MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Matías Godoy

Auxiliar: Cristóbal Valenzuela

Auxiliar 13 : Series de Potencias

22 de Enero del 2018

Recuerdo:

- Una serie de potencias es una serie en donde el término general es de la forma $a_k(x - \alpha)^k$.
- Si la serie $\sum a_k x_0^k$ converge, se tiene que para cada $a \in (0, |x_0|)$ para todo $x \in [-a, a]$ la serie $\sum a_k x^k$ converge absolutamente.
- Dada una serie $\sum a_k x^k$, definimos:

$$R = \sup\{x_0 : \sum a_k x_0^k < \infty\}$$

Además:

$$\frac{1}{R} = \lim |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Además si el límite de la derecha es 0, entonces $R = \infty$.

- Llamaremos intervalo de convergencia al conjunto de reales x para los cuales la serie $\sum a_k x^k$ converge. Notemos que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.
- Dada una serie de potencias $\sum a_k x^k$ con intervalo de convergencia I , definimos:

$$f(x) = \sum a_k x^k$$

Esta función es continua, derivable e integrable. Más aún las integrales y derivadas son término a término.

P1. [Varios]

- a) Determine el intervalo de convergencia para la serie de potencia:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

- b) Utilice la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Para calcular $\sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

- c) Determine un desarrollo en serie de potencias para la función:

$$\ln(1+x^2)$$

- d) Demuestre que si una serie de potencias verifica $\sum a_k x^k = 0$ para todo $x \in (-R, R)$, entonces $a_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Concluya que si $\sum a_k x^k = \sum b_k x^k$, entonces $a_k = b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- e) Sea f una función con desarrollo en series de potencia. Determine una serie de potencias para f si f satisface:

$$x f'(x) + f(x) = \frac{1}{1-x}$$

P2. [Fibonacci]

Recuerde la sucesión de Fibonacci, dada por $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

a) Definamos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots$$

Demuestre que la serie anterior converge cuando $|x| < 1/2$.

Obs: Puede usar sin demostrar que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe.

b) Demuestre que si $|x| < 1/2$:

$$f(x) = \frac{-1}{x^2 + x - 1}$$