MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 14 de Diciembre

Auxiliar 2: Más Continuidad

- **Teorema del valor intermedio (TVI):** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \neq f(b)$, entonces para todo valor $c \in \mathbb{R}$ comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$.
- **Teorema de máximos y mínimos:** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con dominio un intervalo cerrado y acotado) continua, entonces existe $\overline{x}, \underline{x} \in [a, b]$, tal que $\forall x \in [a, b]$ $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$.
- Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **uniformemente continua** en A si $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, y \in A, |x - y| < \delta)|f(x) - f(y)| < \epsilon$.
- Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde A es un intervalo cerrado será uniformemente continua si es continua en cada $x \in A$.

P1. [**Puntos Fijos:** $f(x) = x$]

- Considere la familia de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $f_n(x) = \cos^n(x)$.
  a) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ tiene al menos un punto fijo.
  b) Demuestre que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en que cada x_n es un punto fijo de f_n, entonces tiene una subsucesión convergente.
- Sea $f : [a, b] \to [a, b]$ una función continua. Demuestre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

P2. [**Un mínimo global**] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) \geq |x|$.

- Sea $I = [-f(0), f(0)]$. Demuestre que $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus I)$ se tiene que $f(x) > f(0)$.
- Demuestre que f tiene mínimo global en $\mathbb{R}$.

P3. [**Continuidad Uniforme**] Pruebe que $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $[0, 1]$. ¿Lo sigue siendo si está definida en $\mathbb{R}$?

P4. [**Asíntotas horizontales**] Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que cumple:

- f es continua en $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c_1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c_2$

a) Demuestre que la función es uniformemente continua en su dominio.

b) Demuestre que toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subsucesión $(x_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ que cumple con que $(f(x_{g(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

P5. [Propuesto 1: Otra de TVI] Demuestre que la ecuación

$$e^x \cos(x) + 1 = 0$$

tiene infinitas raíces reales.
Indicación: Considere intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi)$ *con* $k \in \mathbb{N}$.

P6. [Propuesto 2: Quiero alcanzar al mínimo] Considere una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tiene un mínimo global único, que llamaremos $\bar{x}$ y que además cumple que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

Además considere $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n}$$

a) ¿Por que existe tal sucesión?

b) Demuestre que la sucesión debe tener alguna subsucesión convergente.

c) Pruebe que el límite de cualquier subsucesión convergente debe ser $\bar{x}$.