MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 19 de Diciembre

Auxiliar 3: Derivadas + repaso control

- Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\overline{x} \in (a,b)$, si existe el limite

$$\lim_{x\to\overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

- Si f es derivable en $\overline{x}$ entonces es continua en $\overline{x}$
- **[Álgebra de derivadas]** Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\overline{x} \in (a,b)$. Entonces $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (siempre que $g(\overline{x}) \neq 0$) son derivables en $\overline{x}$, con:
    - $(f \pm g)'(\overline{x}) = f'(x) \pm g'(x)$
    - $(f \cdot g)' = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$
    - $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$
- **[Regla de la cadena]**
Sean $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\overline{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c,d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con

$$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

- **[Derivada de la función inversa]** Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x} \in (a,b)$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c,d)$ con

$$(f^{-1})'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{y}))}$$

P1. [Diferenciable no implica derivada continua]
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Demuestre que f es continua y diferenciable, pero que su derivada no es continua.

P2. [Parecido al Sandwich]
Sean f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$ y $f'(a) = g'(a)$. Probar que toda función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, resulta ser derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

P3. [Estudiemos el promedio]
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$

- Pruebe que existen $\underline{x}, \overline{x} \in [a,b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}) \ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$$

- Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a,b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a,b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

P4. [Quiero alcanzar al mínimo] Considere una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tiene un mínimo global único, que llamaremos $\bar{x}$ y que además cumple que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
Además considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n}$$

a) ¿Por que existe tal sucesión?

b) Demuestre que la sucesión debe tener alguna subsucesión convergente.

c) Pruebe que el límite de cualquier subsucesión convergente debe ser $\bar{x}$.

P5. [Hay que soltar la mano]
Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^x$

b) $f(x) = \left(\arctan\left(\frac{x+c}{1-cx}\right)\right)$

P6. [Propuesto 1: Una EDO!] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = af(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con a constante. Determine f(x), para ello considere $g(x) = e^{-ax}f(x)$

P7. [Propuesto 2: Casi una derivada] Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y f derivable en x_0, calcular:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 + \beta h)}{h}$$