MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 19 de Diciembre

Sketch of proof Auxiliar 3: Derivadas + repaso control

P1. [Diferenciable no implica derivada continua]
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ Demuestre que f es continua y diferenciable, pero que su derivada no es continua.

- Continua utilizar nula por acotada.
- Diferenciable, definición de límite + nula por acotada
- Calcular derivadas no en cero y ver que no se van a 0, para ello recordar que $\lim_{x\to 0} f(1/x) = \lim_{y\to\infty} f(y)$ y darse dos sucesiones que se vayan a límites distintos.

P2. [Parecido al Sandwich]
Sean f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables en $a \in \mathbb{R}$ con (1) $f(a) = g(a)$ y (2) $f'(a) = g'(a)$. Probar que toda función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que (3) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, resulta ser derivable en a con $h'(a) = f'(a) = g'(a)$.

- Deducir cuanto vale h(a)
- Utilizando (3) y (1), evaluando en los puntos correspondientes, armarte cotas para h' (Separarse en los límites laterales $lim_{u\to 0^+}$ y $lim_{u\to 0^-}$)
- Concluir utilizando 2

P3. [Estudiemos el promedio]
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$

- Pruebe que existen $\underline{x}, \overline{x} \in [a, b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}) \ \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

  - ¿Que teorema me habla sobre cotas inferiores y cotas superiores?
  - Recordar que si $a < b < c$ y $d < e < f$ entonces $a + d < b + e < c + f$

- Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a, b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

  - Recordar que toda función restringida a su imagen es sobreyectiva y concluir utilizando la parte anterior.

P4. [Quiero alcanzar al mínimo] Considere una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que tiene un mínimo global único, que llamaremos $\bar{x}$ y que además cumple que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.
Además considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \frac{1}{n}$$

a) ¿Por que existe tal sucesión?

b) Demuestre que la sucesión debe tener alguna subsucesión convergente.

c) Pruebe que el límite de cualquier subsucesión convergente debe ser $\bar{x}$.

- Darse una sucesión $x_n \to \overline{x}$, y tomar subsucesión de $f(x_n)$ que cumpla la condición.
- Razone por contradicción y demuestre que si x_n es no acotada entonces tiene subsucesión que se va a $\pm\infty$ y concluir con que el mínimo no puede ser ∞
- Utilizar que el límite es único y que el mínimo es único.