MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 21 de Diciembre

Auxiliar 4: Derivadas

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diremos que $\overline{x}$ es mínimo local de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que

  $$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\overline{x} - \varepsilon, \overline{x} + \varepsilon)$$

  Es decir, llamaremos a $\overline{x}$ como mínimo local si $f(\overline{x})$ es el menor valor en alguna vecindad. Notar que con esto, pueden existir muchos mínimos locales.

  De manera análoga se define el máximo local

- **[Máximos y Mínimos]** Si $\overline{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\overline{x}) = 0$

- **[Teorema de Rolle]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Luego existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

- **[TVM]** Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

  $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

  En particular, si $g(x) = x$ se tiene que

  $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- **[L'Hopital]** Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables tales que: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$ Donde $L = 0$ o $L = \infty$. Luego: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se tiene lo siguiente
  - Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
  - Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.

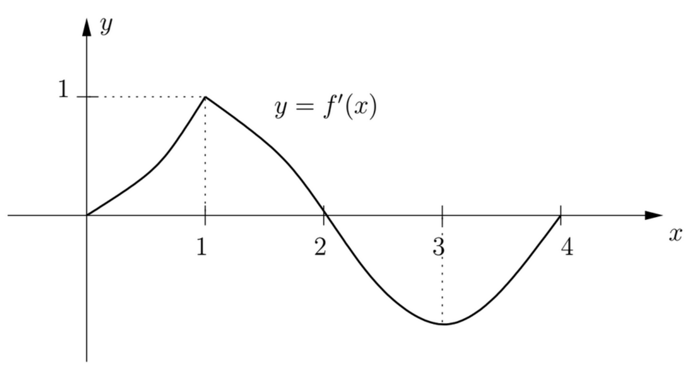
  Análogo para estrictamente creciente/decreciente

P1. [Hay que soltar la mano]
Derive las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^x (x > 0)$

b) $f(x) = \arctan\left(\frac{x+c}{1-cx}\right)$ ¿Puede caracterizar de mejor manera la función?

P2. [La derivada da bastante información de la función]
Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ es el dado en la figura siguiente. Además se sabe que $f(0) = 1$



Usando esta información encuentre el gráfico aproximado de la función f. Debe indicar precisamente en que intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además donde alcanza su máximos y mínimos locales o globales y donde tiene sus inflexiones. Debe probar además que f es acotada superiormente por 3 (use TVM)

P3. [Un clásico de Analizar la función]
Analizar la función $f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$, para ello:

(I) Determine dominio, signos y ceros.
(II) Determine límites laterales en $x = 0$ y continuidad ¿Es reparable?
(III) Determine asíntotas.
(IV) Estudie crecimiento.
(V) Estudie concavidad.
(VI) Dibuje el gráfico de la función indicando puntos importantes.

P4. [Un polinomio]
Considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$$

a) Demuestre que $\exists! x_0 \in [0,1]$ tal que es raíz de h.
b) Sea $\overline{x} = 0$ ¿Es mínimo, máximo o punto de inflexión?

P5. [Propuesto 1: Un poco de TVM] Pruebe que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$|cos(x) - cos(y)| \leq |x - y|$$

P6. [Propuesto 2: Otro análisis] Considere la función $f(x) = e^{-x^2}$. Se pide:

a) Dominio, paridad y signos de f.
b) Continuidad. Asíntotas.
c) Cálculo de f'(x). Analice crecimientos. Encuentre máximos y mínimos.
d) Cálculo de f"(x). Estudie concavidad, convexidad e inflexiones.
e) Gráfico aproximado, señalando valores principales y recorrido.