MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 28 de Diciembre

Auxiliar 5: Optimización y Polinomio de Taylor

- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, y sea
$$T_f^k(h) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f[k](\overline{x})}{k!}h^k$$
Su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces
$$f(x) = T_f^k(h) + o((x - \overline{x})^k)$$
con $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o(h^k)}{h^k} = 0$

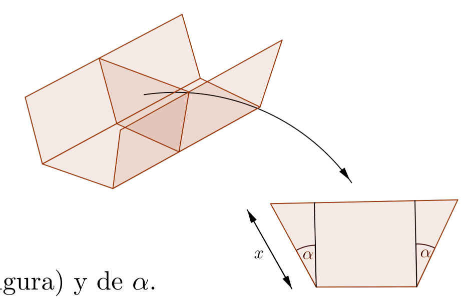
- **[Punto critico]** Diremos que x_* es punto critico de una función diferenciable f si se cumple que $f'(x_*) = 0$.

- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, con $f'(\overline{x}) = \cdots = f^{[k-1]}(\overline{x}) = 0$ y $f^{[k]} \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:
  - I Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) > 0$, entonces $\overline{x}$ es un minimo local
  - II Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x}) < 0$, entonces $\overline{x}$ es un maximo local
  - III Si k es impar, $\overline{x}$ es un punto de inflexión, es decir, es un punto en donde la función cambia su concavidad

- Sea $x_0 \in (a, b)$ y $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función de C^2. Si $f'(x_0) = 0$, existen 3 posibilidades:
  - I $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es mínimo local.
  - II $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es máximo local.
  - III $f'''(x_0) \neq 0$ se puede concluir que x_0 es un punto de inflexión.)

- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \overline{x}$ (respectivamente $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \overline{x})$ tal que:
$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$
Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$

P1. [Optimizando en más de una variable]



Una lamina de zinc de ancho l es plegada para obtener una canaleta trapezoidal . De desea determinar los valores de $x \in [0, \frac{l}{2}]$ y $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para los cuales el área transversal de la canaleta es máxima.

(a) Determinar el área del trapecio en función de x (como en la figura) y de α.

(b) Para cada $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ encontrar el largo $\bar{x}$ que maximiza el área del trapecio y probar que dicha área viene dada por $\frac{l^2 \cos(\alpha)}{4(2 - \operatorname{sen}(\alpha))}$.

(c) Encontrar el angulo $\bar{\alpha}$ que maximiza el área obtenida en el parte anterior. Concluya.

(d) Discuta por que podría no ser este el óptimo.

P2. [Aproximando el logaritmo]
Aproximar la función $f(x) = x\ln(1+x)$ por un polinomio de Taylor de grado 3 en torno a 0 y estimar el error que se comete al calcular el valor de $\ln(\sqrt{\frac{3}{2}})$ utilizando esta aproximación.

P3. [La función coseno]

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. que verifica que $f + f'' = 0$.

a) Muestre que la función es n veces derivable $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si se sabe que $f(0) = f'(0) = 0$, pruebe que f debe ser la función nula.

P4. [Un polinomio]
Considere $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$$

a) Demuestre que $\exists! x_0 \in [0, 1]$ tal que es raíz de h.

b) Sea $\overline{x} = 0$ ¿Es mínimo, máximo o punto de inflexión?

P5. [Propuesto 1: Otro trapecio] Se dispone de una cuerda de largo $3L$, con $L > 0$. Con él se desea formar un trapecio isosceles que tenga tres lados de largo L. Con otra cuerda (suficientemente larga) se desea armar la base, de modo que el área del trapecio sea máxima. Determine el largo de la base y el valor máximo de área (verifique que es máximo).

P6. [Propuesto 2: Aproximando al coseno] Sea $f(x) = cos(x)$. Demuestre que para $x \in (-\pi, \pi)$ se tiene que $vert f(x) - p_n(x)| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$ con p_n el polinomio de Taylor de orden n de la función.