MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 28 de Diciembre

Auxiliar 6: Primitivas

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si
$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$
Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$
- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int (\lambda f) = \lambda (\int f)$
- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces
$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$
- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$
o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$
o, de manera compacta $\int udv = uv - \int vdu$
- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

  obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t
- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.
- Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

P1. [Unas cuantas trigonométricas]

I) a) Demuestre que $\int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}dx = \int tan^4(x)dx$

b) Utilizando el c.v $y = tan(x)$ encuentre la primitiva.

II) Utilizando cambios trigonométricos calcule:
$$\int sen^4(x)$$

III) Calcule $\int tan(x)$

P2. Use integración por partes para calcular:

(I) $\displaystyle\int x^2 e^x dx.$

(II) $\displaystyle\int \cos(\ln(x))dx.$

P3. [Uno de fracciones Parciales]
$$\int \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}dx.$$

P4. **[Propuesto 1: Otra trigonométrica]** Calcule $\int cos^5(x)dx$. Para ello es útil notar que $cos^3(x) = cos^2(x)cos(x)$, y demostrar que $\int cos(x)sen^n(x) = \int y^n$

P5. **[Propuesto 2:**] Sumando un cero conveniente y realizando fracciones parciales calcule: $\int \frac{x^3+2}{x^3+x^2}$

Primivitas conocidas:

P1. $\displaystyle\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$

P2. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

P3. $\displaystyle\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C$

P4. $\displaystyle\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C$

P5. $\displaystyle\int e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

P6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

P7. $\displaystyle\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \sqrt{1-x^2} + C$

P8. $\displaystyle\int \sinh(x) \, dx = \cosh(x) + C$

P9. $\displaystyle\int \cosh(x) \, dx = \sinh(x) + C$

P10. $\displaystyle\int \sec^2(x) \, dx = \tan(x) + C$

P11. $\displaystyle\int \mathrm{cosec}^2(x) \, dx = \mathrm{cotg}(x) + C$

P12. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$