MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 28 de Diciembre

Sketch of proof Auxiliar 6: Primitivas

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $int(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si
$$\forall x \in int(I), \quad F'(x) = f(x)$$
Si F es una primitiva de f, entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$
- Es muy importante notar lo siguiente
  - $\int f'(x)dx = f(x) + c$
  - $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
  - $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
  - $\int(\lambda f) = \lambda(\int f)$
- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces
$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$
- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x, entonces:
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$
o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$
o, de manera compacta $\int udv = uv - \int vdu$
- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables
  - para $a^2 + x^2$, usar $x = atan(v)$ o $x = asenh(v)$
  - para $a^2 - x^2$, usar $x = asen(t)$ o $x = acos(t)$
  - para $x^2 - a^2$, usar $x = asec(v)$ o $x = acosh(v)$

  obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t
- **[Fracciones parciales]**: si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $gr(Q) > gr(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.
- Sea $R(cos(x), sen(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $sen(x)$ y $cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = tan(x/2)$.

P1. [Unas cuantas trigonométricas]

I) a) Demuestre que $\int \frac{x^4}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}dx = \int tan^4(x)dx$
Utilizando $x = \text{sen}(y)$ se concluye.

b) Utilizando el c.v $y = tan(x)$ encuentre la primitiva.
Haciendo caso al enunciado se llega a $\int \frac{x^4}{x^2+1} = \int \frac{x^4-1+1}{x^2+1} = \int (x^2-1) - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^3}{3} - x - arctan(x)$. Luego deshaciendo el cv $\frac{\tan(y)^3}{3} - \tan(y) - y$, y deshaciendo el otro cv, y recordando que $\tan(arcsen(z)) = \sqrt{sec^2(arcsen(z)) - 1} = \sqrt{\frac{1}{1-sen^2(arcsen(z))} - 1} = \sqrt{\frac{1}{1-z^2} - 1}$ se concluye que es $\frac{(\sqrt{\frac{1}{1-x^2}-1})^3}{3} - \sqrt{\frac{1}{1-x^2} - 1} - x + C$

II) Utilizando identidades trigonométricos calcule:
$$\int sen^4(x)$$
Cabe notar que $\text{sen}^4(x) = sen(x)^2(1-\cos^2(x)) = (sen(x)^2\frac{1-\cos(2x)}{2})$ y que $(\sin(x)\cos(x))^2 = \frac{\sin(2x)^2}{4}$. Se debe llegar a $\frac{1}{32}(12x - 8\sin(2x) + \sin(4x)) + C$

III) Calcule $\int tan(x)$
Utilizar $u = cos(x)$ y se concluye que es $\ln(cos(x)) + C$

P2. Use integración por partes para calcular:

(I) $\int x^2 e^x dx$.
Primero $u = x^2, dv = e^x$ luego $u = x, dv = e^x$. Se debe llegar a $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$

(II) $\int \cos(\ln(x))dx$. Integrar por partes dos veces cosa de que se repita la integral a la derecha y pasarla restando. Primero $u = \cos(\ln(x)), dv = dx$ y segundo $u = \sin(\ln(x)), dv = dx$. Se debe llegar a $\frac{1}{2}x(\sin(\ln(x)) + \cos(ln(x))) + C$

P3. **[Uno de fracciones Parciales]**
$\int \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} dx.$
Notando que 1 es raíz se hace división de polinomios y FP de la forma $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$. Resolviendo el sistema se llega a $A = 2, B = 3, C = 1$ y por lo tanto la primitiva es $2\ln(x-1) + 3\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + C$

P4. **[Propuesto 1: Otra trigonométrica]** Calcule $\int cos^5(x)dx$. Para ello es útil notar que $cos^3(x) = cos^2(x)cos(x)$, y demostrar que $\int cos(x)sen^n(x) = \int y^n$

P5. **[Propuesto 2:**] Sumando un cero conveniente y realizando fracciones parciales calcule: $\int \frac{x^3+2}{x^3+x^2}$

Primivitas conocidas:

P1. $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$

P2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

P3. $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$

P4. $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + C$

P5. $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

P6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

P7. $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sqrt{1-x^2} + C$

P8. $\int \sinh(x)\, dx = \cosh(x) + C$

P9. $\int \cosh(x)\, dx = \sinh(x) + C$

P10. $\int \sec^2(x)\, dx = \tan(x) + C$

P11. $\int \text{cosec}^2(x)\, dx = \text{cotg}(x) + C$

P12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$