MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Jueves 4 de Enero

Sketch of proof Aux 8: Repaso C2

P1. Calcule la siguiente primitiva

$$\int 2x\sqrt{2x-3}dx$$

de dos maneras distintas:

a) Utilizando el cambio de variable.
Sea $u=\sqrt{2x-3}$ $udu=dx$ queda $\int u^4+3u^3du$

b) Por partes.
Consideramos $u=\sqrt{2x-3}, dv=2x$

En ambos casos se llega a $\frac{2}{5}(x+1)(2x-3)^{\frac{3}{2}}+C$

P2. Resuelva las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int x^3\ln^2(x)dx$
Integramos por partes dos veces, primero consideramos $u=\ln(x)^2$ y luego $u=\ln(x)$, se llega a $\frac{1}{32}x^4(8ln^2(x)-4\ln(x)+1)+C$

b) $\displaystyle\int\frac{\text{sen}(x)}{1+\text{sen}(x)}dx$
Utilizando el cv, $u=\tan(\frac{x}{2})$ y considerando que $\sin(x)=\sin(2\frac{x}{2})=2\sin(\frac{x}{2})cos(\frac{x}{2})=2\tan(\frac{x}{2})\frac{1}{\sec^2(\frac{x}{2})}=2\tan(\frac{x}{2})\frac{1}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}=\frac{2u}{1+u^2}$ y $du=\frac{\sec^2(\frac{x}{2})}{2}dx=\frac{(1+u^2)}{2}dx$ llegamos a $\int\frac{4u}{(1+u^2)(1+u)^2}$ Separamos en FP $\frac{A}{1+u}+\frac{B}{(1+u)^2}+\frac{Cu+D}{1+u^2}$ Resolviendo el sistema deducimos que $B=-2$ y $D=2$. Quedándonos $2(\frac{1}{u+1}+arctan(u))+C=x-\frac{2\sin(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})+cos(\frac{x}{2})}+C$

c) $\displaystyle\int\frac{dx}{\text{sen}^2(x)\cos^2(x)}$
Notando que $\sin(x)\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2}$ y que $\cot(x)'=-\text{cosec}^2(x)$ se concluye que es $-2\cot(2x)+C$

P3. *a*) Calcule la siguiente recurrencia para $n\in\mathbb{N}$

$$I_n=\int\sec^n(x)dx$$

Utilizamos integración por partes, $u = \sec^{n-2}, dv = \sec^2$ y llegamos a $I_n = sec^{n-2}(x)\tan(x) + (n-2)I_{n-2}$, $I_0 = x + C$, $I_1 = \ln(\tan(x) + \sec(x))$

b) Utilice lo anterior para calcular:

$$\int x^2 \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

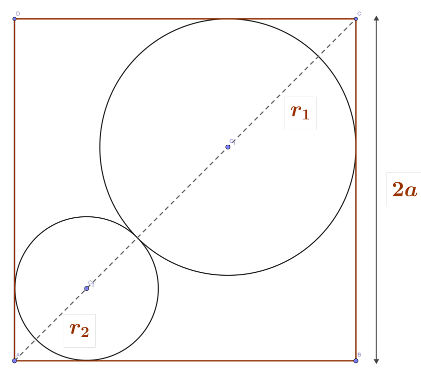
Utilizamos el cv $\tan(y) = ax$ y la parte anterior dos veces (primero con n=5 y después con n=3) para llegar a $\frac{1}{8}(x\sqrt{(}a^2 + x^2)(a^2 + 2x^2) - a^4 \ln(\sqrt{(}a^2 + x^2) + x)) + C$

P4. En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1 y r_2, centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre si y ambas tangentes al cuadrado.

a) Encuentre una relación entre r_1 y r_2

Si en cada centro se tira una perpendicular al lado del cuadrado, se forman dos triangulos isosceles, de ahí deducimos que $2a\sqrt{2} = r_1 + r_2 + r_1\sqrt{2} + r_2\sqrt{2}$

b) Determine los valores de r_1 y de r_2 de modo que la suma de las áreas de los círculos sea máxima. Justifique



Es claro que $A(r_1, r_2) = \pi(r_1^2 + r_2^2) = \pi(\frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - r_2)^2 + r_2^2)$ (Por la parte anterior).
$A' = 2\pi(2r_2 - \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}) = 0 \Rightarrow r_2^* = \frac{2a\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)}$. Pero $A'' = 4\pi > 0$ Por lo que r_2^* es mínimo. Así el máximo se encuentra en $r_2 = 0$ o $r_2 = a$, y como deben haber dos círculos entonces el óptimo es la segunda opción y por consiguiente $r_1^* = a(3 - 2\sqrt{2})$ y $A^* = \pi a^2(18 - 12\sqrt{2})$.