MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Martes 9 de Enero

Auxiliar 9: TFC

- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.
- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in int(I)$:
$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$
- **Corolario del TFC 1:** Si la función F, continua en I es una primitiva cualquiera de f en I, entonces:
$$\forall a.b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
- **TFC 2:** Sea f integrable en (a, b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a, b), entonces:
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y con derivadas continuas en (a, b), entonces:
$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$
- **Integración por sustitución:** Sea g continua en $[a, b]$ y con derivada continua en (a, b). Sea f continua en $g([a, b])$, entonces:
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$
- **TVM-integrales:** Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:
$$\int_a^b f = f(\xi)(b - a)$$
- **TVM Generalizado - integrales:** Si f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que
$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$

P1. Calcule el valor del límite
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} sin(t^2)dt}{1 - e^{x^6}}$$

P2. Sea $G : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $G(x) = \int_0^x \frac{sen(t)}{t}dt$, donde $\frac{sen(t)}{t}$ se define en 0 por continuidad.

Demostrar que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(t)}{t}dt - 1$$

P3. Demuestre que si f es par entonces $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se define $G(x) = \displaystyle\int_{x}^{x+1} (x-t)f(t)dt$. Demuestre que $G''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Indicación: puede ser util usar TVM para derivadas

P5. Sean f, g funciones continuas en $\mathbb{R}$, con f monótona, derivable y con derivada continua. Demuestre que $\exists \xi \in [a, b]$ que satisface

$$\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx = f(a)\int_{a}^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)dx$$

Indicación: Defina $G(x) = \int_{a}^{x} g(t)dt$ *e integre por partes.*

P6. **[Propuesto 1:]** Sea f es impar, calcule $\int_{-a}^{a} f(t)dt$

P7. **[Propuesto 2:]** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $x\sin(\pi x) = \int_{0}^{x^2} f(t)dt$. Calcule f(4).