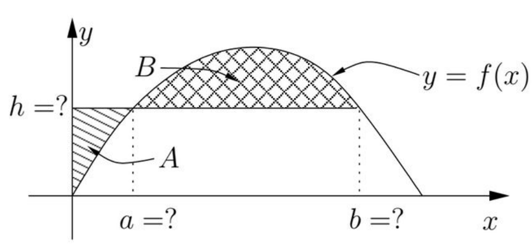
MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesores: Sebastián Zamorano A.
Auxiliar: Juan Pedro Ross O.
Fecha: Miércoles 10 de Enero

Auxiliar 10: Aplicaciones de la integral

1. Sea f una función que cambia de signo una cantidad finita de veces en $[a, b]$ entonces el área de la función en ese intervalo se calcula como $\int_a^b |f(x)|dx$
2. Sea f una función diferenciable en $[a, b]$ y $(x, f(x))$ la curva que genera su gráfico, entonces la longitud de arco de curva está dada por:
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$$
3. Manto de revolución: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, continua y diferenciable entonces, el área del manto de revolución en torno al eje OX está dado por:
$$A_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$
4. Consideremos la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, entonces:
   - El volumen de revolución de R torno al eje OX es $V_{OX} = \pi \displaystyle\int_a^b (f(x))^2 dx$.
   - El volumen de revolución de R torno al eje OY es $V_{OY} = 2\pi \displaystyle\int_a^b xf(x)dx$.
5. Área en coordenadas polares: Sea $\rho : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^+$ una función integrable, con $\beta - \alpha \leq 2\pi$ y que define una curva en coordenadas polares $\rho = \rho(\phi)$, entonces el área de la región $R = \{(\rho\cos(\phi), \rho\,\mathrm{sen}(\phi)) : \ \phi \in [\alpha, \beta], \rho \in [0, \rho(\phi)]\}$ está dada por:
$$V = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\rho(\phi))^2 d\phi$$
6. Centro de gravedad de una superficie plana: Si consideramos la misma región R anterior, entonces las coordenadas del centro de masas están dadas por:
$$X_G = \frac{\displaystyle\int_a^b xf(x)dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx} \quad Y_G = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b (f(x))^2 dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)dx}.$$

P1. Dada $f(x) = 2x - 3x^2$, determinar la altura de una recta horizontal h para que las áreas de A y B de la figura sean iguales.



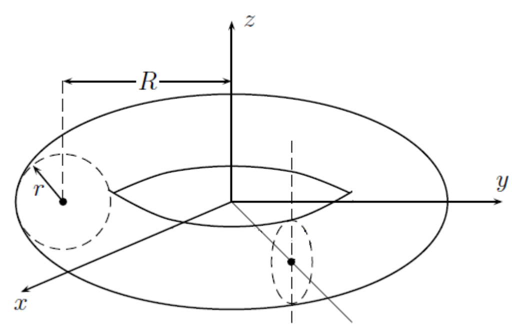
P2. Considera las funciones $f(x) = \text{sen}(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas en $[0, \pi]$.

(I) Pruebe que $g(x) \geq f(x)\ \forall x \in [0, \pi]$
Indicación: Analizar concavidad y con ello deducir el mínimo de la función $h(x) = g(x) - f(x)$.

(II) Calcular el área de la región encerrada por g y f.

(III) Calcular el volumen de revolución de la región respecto al eje OY.

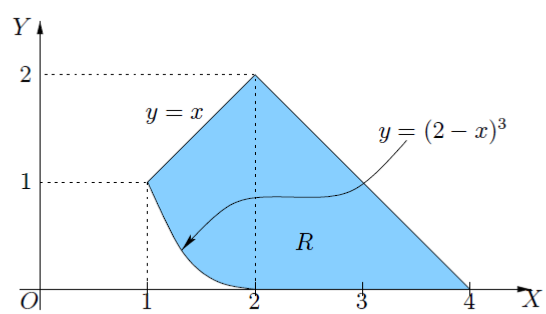
P3. Calcular el área del toro, es decir del cuerpo generado al rotar una circunferencia de radio r y de centro en $(0, R)$ $(R > r)$, en torno al eje OX (como en la figura).



P4. Encuentre la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que cumple que $f(0) = 0$ y además el largo de la curva desde 0 hasta cualquier punto x es $x^2 + 2x - f(x)$.

P5. **[Propuesto 1:**] Calcule el largo de la curva $y = a\cosh(x/a)$ con $x \in [0, a]$.

P6. **[Propuesto 2:**] Considere la región de la figura:



Calcule el área del manto generado al rotar la figura en torno al eje X.
Indicación: Separe los tres segmentos y calcule cada área por separado